

Statique des poutres élastiques

Jean GARRIGUES

Mai 99



Chapitre 1

Introduction.

La statique des poutres élastiques¹ est un cas particulier de l'élasticité classique. On y étudie des solides *déformables, élastiques, en petites déformations et en petits déplacements*, dont la forme est assimilable à une ligne épaisse. Cette géométrie particulière amène, au prix de quelques hypothèses, des simplifications par rapport à l'élasticité tridimensionnelle : les équations y sont plus simples et leurs solutions souvent accessibles analytiquement. De plus, dans la vie courante, un grand nombre de constructions (ponts, bâtiments, éléments de machines...) sont assimilables à des assemblages de poutres. Ces deux raisons expliquent le large succès de ce modèle.

Pour mettre en place ce modèle, la démarche générale est la suivante :

A partir d'un calcul tridimensionnel en élasticité classique sur un tronçon de poutre droite (le problème de Saint-Venant), on tente de réduire tous ces résultats à des valeurs sur la ligne moyenne de la poutre. Ainsi, les grandeurs manipulées ne varient plus qu'en fonction de l'abscisse curviligne sur la ligne moyenne.

On considère donc les efforts comme appliqués sur la ligne moyenne alors qu'en réalité, ils sont appliqués sur la surface extérieure de la poutre. De même, on considère que la connaissance des déplacements de la ligne moyenne est une information suffisante, les déplacements des autres points de la section droite étant considérés comme peu différents.

Par contre, la description des contraintes et celle des déformations restent tridimensionnelles car leurs variations dans la section droite sont importantes et impossibles à négliger.

Comme dans toute modélisation, l'ingénieur doit s'interroger sur le bien-fondé du choix du modèle pour représenter une réalité. C'est en gardant bien à l'esprit les hypothèses qui y sont introduites, qu'il pourra répondre à cette question, et évitera de faire dire au modèle ce qu'il ne peut pas dire.

Il existe un grand nombre de traités sur les poutres, dans lesquels on développe un grand nombre de méthodes particulières pour résoudre des problèmes de poutres (et de structures de poutres). Beaucoup d'entre-elles sont devenues obsolètes en raison du développement actuel des calculateurs et des logiciels. Ce cours se limite donc aux fondements de la théorie des poutres et ne prétend pas à l'exhaustivité. Il a seulement pour but d'exposer les notions indispensables à connaître pour comprendre les limites de la modélisation, comprendre les données nécessaires au modèle, et enfin interpréter correctement les résultats d'un calcul.

1. Cette spécialité est communément (mal) nommée Résistance des Matériaux ou encore RDM.

Chapitre 2

Géométrie des poutres.

2.1 Définition d'une poutre

Soit \mathcal{C} une courbe *orientée* appelée *ligne moyenne*.

Soit G son point courant et soit l son abscisse curviligne mesurée à partir d'un point fixe O de \mathcal{C} .

Soit enfin $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ le trièdre de Fresnet *orthonormé* associé à la ligne moyenne \mathcal{C} en G .

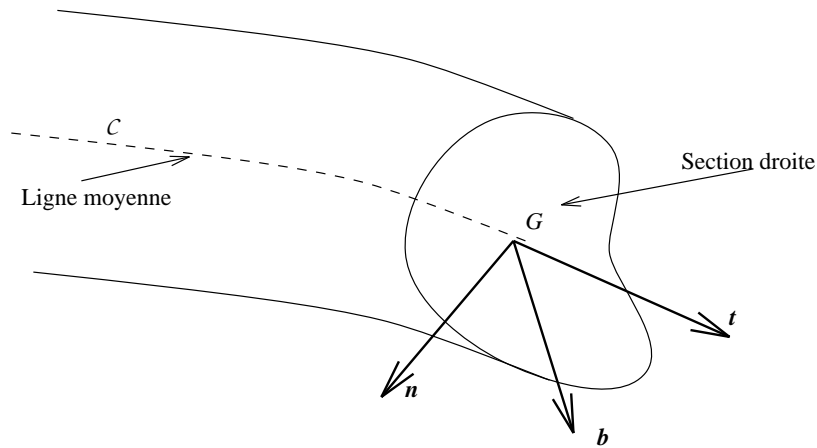


FIG. 2.1 – Le trièdre de Fresnet en un point de la ligne moyenne

On rappelle les formules de Fresnet définissant le trièdre de Fresnet et les caractéristiques géométriques des courbes dans \mathcal{E}_3

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{OG}}{dl} \quad (\text{tangente unitaire})$$

$$\mathbf{n} = R \frac{d\mathbf{t}}{dl} \quad (\text{normale principale unitaire})$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} \quad (\text{binormale unitaire})$$

$$\frac{d\mathbf{t}}{dl} = \frac{\mathbf{n}}{R}; \quad \frac{d\mathbf{n}}{dl} = -\frac{\mathbf{t}}{R} + \frac{\mathbf{b}}{T}; \quad \frac{d\mathbf{b}}{dl} = -\frac{\mathbf{n}}{T}$$

où R est le *rayon de courbure* (toujours ≥ 0) et T est la *torsion géométrique*¹.

1. Ne pas confondre la torsion géométrique (qui est une caractéristique géométrique de \mathcal{C}) avec la notion de torsion qui sera introduite plus loin (qui est un mouvement de déformation de la poutre sous certaines sollicitations).

Le plan $\{\mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ est appelé *plan normal en G*. Dans ce plan on définit la *section droite S* de la poutre, de contour extérieur fermé Ω et de centre de gravité G sur la ligne moyenne. La section droite peut aussi avoir des contours intérieurs Ω_i ².

On appelle poutre, le volume engendré par les sections droites lorsque G décrit la ligne moyenne. On suppose de plus que :

- Les sections droites sont constantes ou «lentement variables» lorsque G varie.
- Si on appelle d une dimension transversale de la section droite, on a en tout point de la poutre $d \ll R$.

Ces deux hypothèses sont essentielles : elles permettent d'assimiler un tronçon de poutre courbe de longueur dl à un tronçon de poutre droite. Cette approximation est à la base de tout ce qui suit.

Enfin, on se place dans le cadre de *l'élasticité linéaire isotrope, en petites déformations et petits déplacements*: Le tenseur des déformations utilisé est donc ϵ , et les équations d'équilibre s'écrivent sur la configuration initiale³. Le matériau constituant la poutre a donc une loi de comportement qu'on rappelle ici :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda\text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{G}$$

soit encore, en utilisant E et ν :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{G} \right)$$

soit encore :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}\boldsymbol{\sigma} \mathbf{G}$$

On rappelle les relations entre les coefficients de Lamé $\{\mu, \lambda\}$ ⁴ et les coefficients utilisés en élasticité $\{E, \nu\}$:

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

2.2 Caractéristiques géométriques des sections droites.

On définit ici quelques caractéristiques géométriques de sections qui seront utiles dans la suite. Elles permettent de caractériser la répartition de la matière dans la section droite.

2.2.1 Centre de gravité.

Soit S une section droite, de point courant N et soit P un point fixe du plan normal, Le centre de gravité (géométrique) est défini par :

$$\mathbf{PG} = \frac{1}{S} \int_S \mathbf{PN} \, ds$$

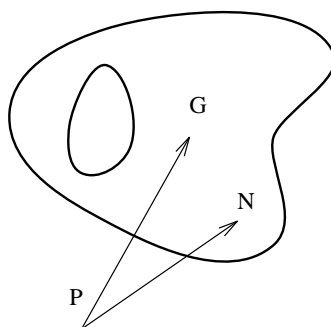


FIG. 2.2 – Centre de gravité d'une section droite

Il est facile de voir que le centre de gravité G est indépendant du choix de P et qu'on a la relation :

$$\int_S \mathbf{GN} \, ds = 0$$

2.2.2 Moment statique par rapport à une droite.

Soit \mathcal{S} une section droite, de point courant N et soit δ une droite du plan de la section droite. Soit K la projection de N sur δ . Le moment statique de \mathcal{S} par rapport à δ est défini par :

$$\mathbf{A}(\mathcal{S}, \delta) = \int_S \mathbf{KN} \, ds$$

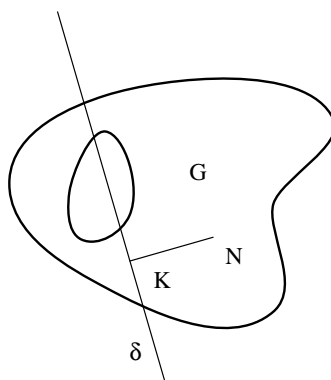


FIG. 2.3 – Moment statique d'une section droite par rapport à la droite δ

\mathbf{A} est évidemment un vecteur perpendiculaire à δ .

Il est facile de voir que si $G \in \delta$, alors $\mathbf{A}(\mathcal{S}, \delta) = 0$. Les droites δ qui passent par G sont appelées *droites centrales*.

Si on définit un repère central orthonormé $\{G, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ dans le plan normal, on définit les *nombre*s :

$$\begin{aligned} A_2 &= \mathbf{A}(\mathcal{S}, \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{x}_3 = \int_S x_3 \, ds \\ A_3 &= \mathbf{A}(\mathcal{S}, \mathbf{x}_3) \cdot \mathbf{x}_2 = \int_S x_2 \, ds \end{aligned}$$

2. par exemple un tube.

3. comme en élasticité classique.

4. Dans beaucoup d'ouvrages sur les poutres, le coefficient de Lamé μ est appelé *module de cisaillement* et est symbolisé par G . Ne pas confondre avec le tenseur métrique \mathbf{G}

qu'on appelle respectivement moment statique de \mathcal{S} par rapport à \mathbf{x}_2 et moment statique de \mathcal{S} par rapport à \mathbf{x}_3

2.2.3 Moment quadratique d'une section par rapport à une droite.

Avec les notations précédentes, on définit le moment quadratique de \mathcal{S} par rapport à δ :

$$I(\mathcal{S}, \delta) = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{KN}^2 ds$$

Cette définition est identique à celle de moment d'inertie d'un solide autour d'une droite, mais ici, le solide est bidimensionnel et plan, et sa masse surfacique vaut 1. On l'appelle ainsi souvent *moment d'inertie* de \mathcal{S} par rapport à δ . Il en a les mêmes propriétés qu'on rappelle brièvement ici :

Si on définit un repère *central orthonormé* $\{G, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ dans le plan normal, il existe un tenseur du second ordre symétrique défini positif \mathbf{I}_G appelé *tenseur d'inertie* de \mathcal{S} en G , dont les composantes sur cette base sont :

$$[\mathbf{I}_G \bullet\bullet] = \begin{bmatrix} I_{22} = \int_{\mathcal{S}} (x_3)^2 ds & I_{23} = - \int_{\mathcal{S}} x_2 x_3 ds \\ I_{32} = - \int_{\mathcal{S}} x_2 x_3 ds & I_{33} = \int_{\mathcal{S}} (x_2)^2 ds \end{bmatrix}$$

tel que le moment quadratique de \mathcal{S} par rapport à une droite δ de la section droite, de direction unitaire \mathbf{u} , et passant par G est donné par :

$$I_G(\mathcal{S}, \mathbf{u}) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{I}_G \otimes \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{22} & I_{23} \\ I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Il existe deux directions orthogonales⁵ unitaires $\{\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ appelées *directions centrales principales d'inertie* et deux valeurs propres $\{I_2, I_3\}$ appelées *moments quadratiques centraux principaux* telles que $\mathbf{I}_G \otimes \mathbf{X}_2 = I_2 \mathbf{X}_2$ et $\mathbf{I}_G \otimes \mathbf{X}_3 = I_3 \mathbf{X}_3$

Dans le repère orthonormé $\{G, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$, les composantes de \mathbf{I}_G se rangent dans une matrice diagonale.

$$[\mathbf{I}_G] = \begin{bmatrix} I_2 = \int_{\mathcal{S}} (x_3)^2 ds & 0 \\ 0 & I_3 = \int_{\mathcal{S}} (x_2)^2 ds \end{bmatrix} \text{ dans la base principale}$$

2.2.4 Le repère local principal en théorie des poutres.

Comme on le verra dans la suite, la forme la plus simple des équations de la théorie des poutre s'écrit dans le repère central principal d'inertie, complété par la tangente à la ligne moyenne. Toute étude sur une poutre commence par la définition de ce repère.

Dans ce cours, on utilisera les notations suivantes :

- $\mathbf{X}_1 = \mathbf{t}$: tangente unitaire à la ligne moyenne
- $x_1 = l$: abscisse curviligne d'une section droite sur la ligne moyenne⁶

⁵. car \mathbf{I}_G est un tenseur du second ordre symétrique.

⁶. On utilisera plutôt x_1 et \mathbf{X}_1 pour les poutres droites et \mathbf{t} et l pour les poutres courbes

- \mathbf{X}_2 : première direction principale d'inertie unitaire de la section droite d'abscisse x_1
- \mathbf{X}_3 : seconde direction principale d'inertie unitaire de la section droite d'abscisse x_1
- (x_2, x_3) : coordonnées d'un point de la poutre dans la section droite d'abscisse x_1

Les sens de \mathbf{X}_2 et \mathbf{X}_3 sont choisis tels que le repère orthonormé $\{G, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ soit direct.

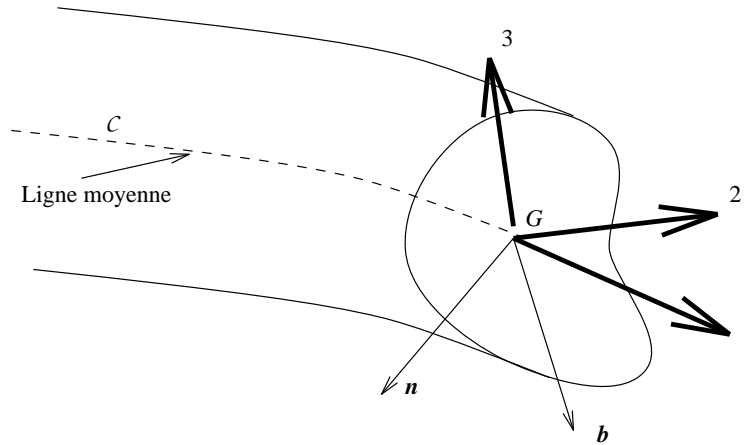


FIG. 2.4 - Le repère local principal d'une section droite

En général, le repère $\{G, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ (lié aux propriétés de \mathcal{S}) est différent du trièdre de Fresnet (lié aux propriétés de \mathcal{C}). On a toutefois

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{t}$$

et les plans (\mathbf{n}, \mathbf{b}) et $(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ sont confondus.

C'est dans le repère $\{G, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ que seront exprimés les résultats de la théorie des poutres.

Chapitre 3

Actions mécaniques dans les poutres.

De même qu'en élasticité classique, on se limite à l'étude de la statique. Les efforts exercés sont donc constants ou "lentement variables", c'est à dire qu'on néglige les effets dynamiques. Pendant le passage de l'état initial à l'état déformé, on considère que la poutre passe par une succession d'états d'équilibre (hypothèse "quasi-statique").

De plus, comme en élasticité classique, les déplacements étant petits, on peut écrire les équations de la statique sur la configuration initiale.

Enfin, comme d'habitude en mécanique, les actions mécaniques sont représentées par des *torseurs*, avec un vecteur résultant et un vecteur moment résultant en un certain point. Conventionnellement, sauf indication contraire, le vecteur moment est donné au *point d'application* du torseur, c'est à dire au point où il s'applique sur la ligne moyenne.

Toutefois, l'addition de deux torseurs n'a de sens que si leurs moments sont définis au même point. Il faut donc «transporter» les moments au même point avant de les additionner. Notamment on additionne des torseurs quand on écrit les équations de la statique :

$$\sum \mathcal{T}_{ext} = \mathbf{0}$$

On rappelle pour mémoire la formule de transport des moments :

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R} \\ \mathbf{M}_P \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R} \\ \mathbf{M}_Q = \mathbf{M}_P + \mathbf{QP} \wedge \mathbf{R} \end{array} \right\}_Q$$

3.1 Actions mécaniques extérieures.

Si on isole une poutre (ou un tronçon de poutre), on appelle *actions mécaniques extérieures* les actions mécaniques appliquées par le milieu extérieur *sur la partie isolée*.

On distingue deux sortes d'actions mécaniques extérieures :

- *Les charges*: Ce sont les efforts auxquels la poutre doit résister.
- *Les actions de liaison*¹: Ce sont les actions mécaniques exercées par les liaisons qui maintiennent la poutre en place.

En général, les charges sont des données du problème, et les actions de liaison sont des inconnues.

1. Qu'on appelle parfois les *réactions de liaison*.

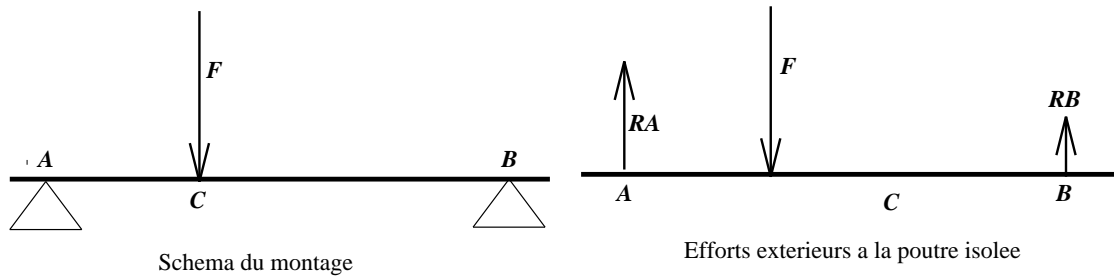


FIG. 3.1 – Exemple d'efforts extérieurs à une poutre

Par exemple, dans la figure 3.1 \mathbf{F} est une charge, \mathbf{R}_A et \mathbf{R}_B sont des actions de liaison.

3.1.1 Les charges.

En théorie des poutres les charges sont considérées comme étant appliquées sur la ligne moyenne. On distingue :

- *Les charges concentrées*: Il s'agit d'un torseur appliqué en un point de la poutre. Dans l'exemple précédent, la charge appliquée en C est un torseur de résultante \mathbf{F} et de moment en C nul.
- *Les charges réparties*: Ce sont des densités linéiques de torseur appliquées sur une portion de la ligne moyenne². Le plus souvent, les densités linéiques de torseur se réduisent à des densités linéiques de forces. Les densités linéiques de moment sont rares dans la pratique.

3.1.2 Les actions de liaison.

Toute poutre (ou système de poutres) isolé et en équilibre a nécessairement des liaisons avec son milieu extérieur. Les actions de ces liaisons sur le système isolé sont des torseurs qu'on définit conventionnellement au point de la liaison³. Dans la figure 3.1, le torseur action de liaison en A

est $\mathcal{T}_A = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R}_A \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}$

En théorie des poutres, on n'utilise que deux types de liaisons :

- *Les liaisons parfaites*: Ce sont des liaisons telles que le travail des forces de liaison dans les déplacements relatifs permis est nul⁴. Ainsi, si la liaison permet une mobilité de translation dans une direction \mathbf{u} , la résultante du torseur de liaison est nécessairement perpendiculaire à \mathbf{u} . De même, si la liaison permet une mobilité de rotation autour de la direction \mathbf{v} , le moment de la liaison est nécessairement perpendiculaire à \mathbf{v} . Le lecteur est vivement invité à analyser les torseurs de liaison des liaisons courantes.
- *Les liaisons élastiques*: Lorsqu'il semble difficile de modéliser une liaison par une liaison parfaite, parce que les mouvements supposés bloqués ont en réalité une certaine souplesse, on modélise cette rigidité imparfaite par un ressort. Pour un blocage en translation imparfait

2. On voit que contrairement à l'élasticité tridimensionnelle, on ne peut pas envisager de densités surfaciques ou volumiques. Notamment, si on veut tenir compte de l'effet de la pesanteur sur une poutre, on doit la modéliser par une densité linéique de force appliquée sur la ligne moyenne: le poids par unité de longueur (en N/m dans les unités SI).

3. Là encore, il y a une modélisation: la poutre étant assimilée à une ligne, son contact avec l'extérieur est assimilé à un point. La réalité est plus complexe. Puisqu'on résume les actions de liaison à un simple torseur appliqué en un point, il ne faut pas s'attendre à ce que le modèle nous renseigne correctement sur ce qui se passe au voisinage de ce point.

4. Pratiquement, cela signifie qu'on néglige les frottements dans la liaison

dans la direction \mathbf{u} , on met un ressort linéaire dans cette direction, pour un blocage en rotation imparfait autour de la direction \mathbf{v} , on met un ressort spiral autour de cette direction. Les raideurs de ces ressorts (en N/m ou en mN/rd) sont estimées ou résultent d'une mesure sur une liaison existante.

Le choix d'un modèle de liaison est une phase essentielle de la modélisation d'un système de poutres réel. Il influe de manière importante sur les résultats. Il est à la charge de l'ingénieur de bien analyser la liaison réelle pour choisir le modèle de liaison adapté.

3.1.3 Equilibre des actions mécaniques extérieures.

Le principe fondamental de la statique affirme que la somme des actions mécaniques extérieures (charges et actions de liaison) d'un système isolé et en équilibre est un torseur nul.

Si on note :

- $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{M}_i \end{array} \right\}_{A_i}$ les torseurs de charges extérieures concentrées aux points A_i ,
- $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}(l) \\ \boldsymbol{\mu}(l) \end{array} \right\}_G$ les torseurs de charges extérieures linéiques répartis sur la ligne moyenne,
- $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_k \\ \mathbf{W}_k \end{array} \right\}_{B_k}$ les torseurs d'actions de liaison aux points aux points de liaison B_k ,

Le principe fondamental de la statique se traduit par les deux équations vectorielles :

$$\sum_i \mathbf{F}_i + \sum_k \mathbf{R}_k + \int \mathbf{p}(l) dl = \mathbf{0}$$

$$\sum_i \mathbf{OA}_i \wedge \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{M}_i + \sum_k \mathbf{OB}_k \wedge \mathbf{R}_k + \sum_k \mathbf{W}_k + \int \mathbf{OM} \wedge \mathbf{p}(l) dl + \int \boldsymbol{\mu}(l) dl = \mathbf{0}$$

Si on considère les charges comme connues, et les actions de liaison non nulles comme inconnues⁵, on peut classer les problèmes en trois catégories :

- *Les problèmes isostatiques* : Le système d'équations de la statique est régulier pour les inconnues de liaison. On peut donc déterminer les inconnues de liaison en fonction des charges, *en utilisant uniquement les équations de la statique.*
- *Les problèmes hyperstatiques* : Le système d'équations de la statique est insuffisant pour déterminer les inconnues de liaison. Il faudra des équations supplémentaires (dédiées de la théorie des poutres) pour déterminer complètement la solution. Les systèmes hyperstatiques sont très courants dans la réalité industrielle.
- *les problèmes hypostatiques* : Le système d'équations de la statique n'a pas de solution. Cela signifie qu'il n'y a pas d'équilibre possible sous l'action des charges avec de telles liaisons. Soit on veut étudier le mouvement et il faut alors écrire les lois de la dynamique, soit on veut que le système prenne une position d'équilibre sous les charges et il faut ajouter des liaisons pour s'opposer au mouvement.

L'objet de ce cours étant la statique des poutres, on n'envisagera pas les problèmes hypostatiques.

⁵. Le nombre d'inconnues de liaison dépend du type de la liaison qui a été choisie dans la phase de modélisation, d'où l'importance de l'analyse de la liaison.

3.2 Efforts intérieurs.

On définit les efforts intérieurs à une poutre (milieu continu curviligne) de la même manière qu'en mécanique des milieux continus tridimensionnels : On imagine une coupure du milieu qui rend extérieurs les efforts intérieurs.

Considérons une poutre en équilibre sous l'action d'efforts extérieurs (charges et actions de liaison). Soit une coupure au point G , qui divise le milieu en deux parties \mathcal{C}_+ et \mathcal{C}_- .

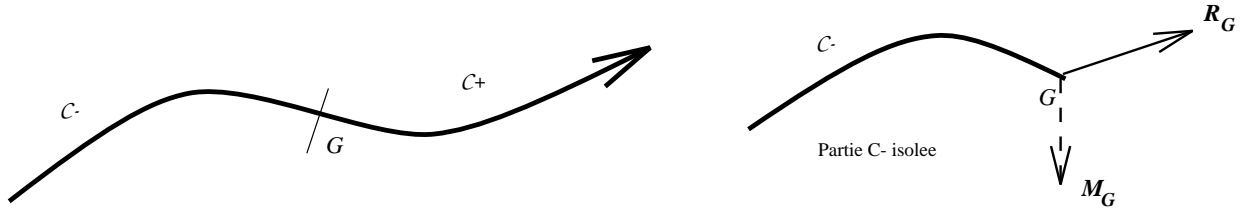


FIG. 3.2 – Coupure dans une poutre

On appelle :

- \mathcal{T}_{ext+} la partie du tenseur des efforts extérieurs qui s'applique sur la partie \mathcal{C}_+ ,
- \mathcal{T}_{ext-} la partie du tenseur des efforts extérieurs qui s'applique sur la partie \mathcal{C}_- ,
- \mathcal{T}_G le tenseur d'action de la partie \mathcal{C}_+ sur la partie \mathcal{C}_- en G (c'est une action *extérieure* à \mathcal{C}_-). \mathcal{T}_G est appelé *tenseur des efforts intérieurs* en G .

On peut écrire les égalités *torsorielles*⁶ suivantes :

Équilibre global de la poutre : $\mathcal{T}_{ext+} + \mathcal{T}_{ext-} = \mathbf{0}$

Équilibre de la partie \mathcal{C}_- : $\mathcal{T}_{ext-} + \mathcal{T}_G = \mathbf{0}$

On en déduit deux manières d'évaluer le tenseur intérieur \mathcal{T}_G en G :

$$\boxed{\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_{ext+} = -\mathcal{T}_{ext-}}$$

Les éléments de réduction \mathbf{R}_G et \mathbf{M}_G du tenseur intérieur \mathcal{T}_G sont habituellement définis en G . Il est donc habituel d'exprimer \mathcal{T}_{ext+} ou \mathcal{T}_{ext-} en G pour calculer les éléments de réduction \mathbf{R}_G et \mathbf{M}_G de \mathcal{T}_G .

Définitions.

Les différentes composantes du tenseur intérieur défini en G sur la base locale principale d'inertie de la poutre $\{G, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ en G ont des noms et des symboles usuels :

- $N = \mathbf{R}_G \cdot \mathbf{X}_1$: effort normal
 - Si $N > 0$, on dit que la poutre est en traction au point G
 - Si $N < 0$, on dit que la poutre est en compression au point G
- $T_2 = \mathbf{R}_G \cdot \mathbf{X}_2$: effort tranchant suivant \mathbf{X}_2
- $T_3 = \mathbf{R}_G \cdot \mathbf{X}_3$: effort tranchant suivant \mathbf{X}_3
- $\mathbf{T} = T_2 \mathbf{X}_2 + T_3 \mathbf{X}_3$: effort tranchant (vecteur dans le plan de la section droite).
- $M_t = \mathbf{M}_G \cdot \mathbf{X}_1$: Moment de torsion

6. On rappelle que pour calculer la somme de deux tenseurs, il faut les transporter au même point.

- $M_{f2} = \mathbf{M}_G \cdot \mathbf{X}_2$: Moment de flexion autour de \mathbf{X}_2
- $M_{f3} = \mathbf{M}_G \cdot \mathbf{X}_3$: Moment de flexion autour de \mathbf{X}_3
- $\mathbf{M}_f = M_{f2}\mathbf{X}_2 + M_{f3}\mathbf{X}_3$: Moment de flexion (vecteur dans le plan de la section droite).

Diagrammes des efforts intérieurs.

Pour représenter l'évolution de ces différentes composantes le long de la poutre, on a l'habitude de les présenter sous forme de courbes en fonction de l'abscisse curviligne l . Par exemple, le diagramme de l'effort normal est la courbe $N = f(l)$, de même on trace les diagrammes des autres composantes. Ces représentations graphiques sont très utiles pour la recherche des sections droites les plus sollicitées.

3.3 Equations d'équilibre local des poutres.

Considérons une poutre soumise à un torseur extérieur réparti⁷ (charges et actions de liaison) $\left\{ \begin{matrix} \mathbf{p}(l) \\ \boldsymbol{\mu}(l) \end{matrix} \right\}_G$. Considérons un tronçon quelconque AB de cette poutre.

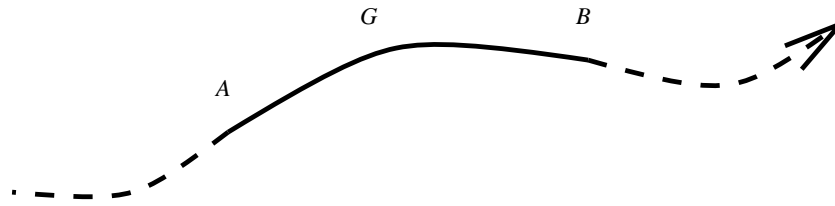


FIG. 3.3 - Équilibre d'un tronçon de poutre

Si on isole le tronçon AB , ses efforts extérieurs sont :

- la partie de la densité linéique qui s'applique sur le tronçon AB
- l'action du reste de la poutre sur le point B , qui est par définition le torseur intérieur en B $\left\{ \begin{matrix} \mathbf{R}_B \\ \mathbf{M}_B \end{matrix} \right\}_B$
- l'action du reste de la poutre sur le point A , qui est par définition l'opposé du torseur intérieur en A $\left\{ \begin{matrix} -\mathbf{R}_A \\ -\mathbf{M}_A \end{matrix} \right\}$

Le tronçon AB étant en équilibre, on peut écrire :
la nullité des résultantes des efforts extérieurs

$$-\mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B + \int_A^B \mathbf{p}(l) dl = \mathbf{0}$$

et la nullité des moments en un point O quelconque des efforts extérieurs

$$-\mathbf{M}_A - \mathbf{OA} \wedge \mathbf{R}_A + \mathbf{M}_B + \mathbf{OB} \wedge \mathbf{R}_B + \int_A^B \boldsymbol{\mu}(l) dl + \int_A^B \mathbf{OG} \wedge \mathbf{p}(l) dl = \mathbf{0}$$

7. Le fait de poser que le chargement extérieur est une densité linéique de force ne restreint pas la généralité de ce qui suit : en effet, une force ou un moment concentré peuvent être vus comme une distribution de Dirac. Il suffit donc de considérer $\mathbf{p}(l)$ et $\boldsymbol{\mu}(l)$ comme des distributions, et les intégrales qui suivent comme des intégrales de Lebesgue.

Or, \mathbf{R}_G et \mathbf{M}_G étant des fonctions de l^8 on peut écrire les égalités suivantes :

$$\mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A = \int_A^B \frac{d\mathbf{R}_G}{dl}$$

$$\mathbf{M}_B - \mathbf{M}_A = \int_A^B \frac{d\mathbf{M}_G}{dl} dl$$

$$\mathbf{OB} \wedge \mathbf{R}_B - \mathbf{OA} \wedge \mathbf{R}_A = \int_A^B \frac{d(\mathbf{OG} \wedge \mathbf{R}_G)}{dl} dl$$

Ce qui permet d'écrire les équations d'équilibre de AB sous la forme :

$$\int_A^B \frac{d\mathbf{R}_G}{dl} + \mathbf{p}(l) dl = \mathbf{0}$$

$$\int_A^B \frac{d\mathbf{M}_G}{dl} + \frac{d(\mathbf{OG} \wedge \mathbf{R}_G)}{dl} + \boldsymbol{\mu}(l) + \mathbf{OG} \wedge \mathbf{p}(l) dl = \mathbf{0}$$

Ces intégrales étant nulles pour tout tronçon AB , on obtient :

$$\frac{d\mathbf{R}_G}{dl} + \mathbf{p}(l) = \mathbf{0}$$

$$\frac{d\mathbf{M}_G}{dl} + \frac{d(\mathbf{OG} \wedge \mathbf{R}_G)}{dl} + \boldsymbol{\mu}(l) + \mathbf{OG} \wedge \mathbf{p}(l) = \mathbf{0}$$

En développant la dérivée du produit vectoriel et en simplifiant avec la première équation, on obtient *les équations d'équilibre local* :

$$\boxed{\frac{d\mathbf{R}_G}{dl} + \mathbf{p}(l) = \mathbf{0}}$$

$$\boxed{\frac{d\mathbf{M}_G}{dl} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{R}_G + \boldsymbol{\mu}(l) = \mathbf{0}}$$

La résolution de ces équations différentielles vectorielles est une autre alternative pour la détermination du torseur intérieur.

3.4 Torseur intérieur et contraintes.

On considère maintenant la poutre comme un milieu tridimensionnel, la mécanique des milieux continus nous enseigne qu'en tout point M de la poutre il existe un tenseur des contraintes symétrique $\boldsymbol{\sigma}$ tel que la contrainte \mathbf{C} en ce point et pour une facette de normale unitaire \mathbf{n} est donné par

$$\mathbf{C}_{M,\mathbf{n}} = \boldsymbol{\sigma}_M \overline{\otimes} \mathbf{n}$$

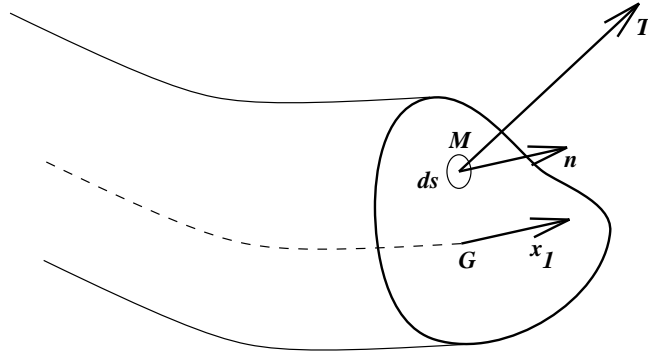


FIG. 3.4 – Contraintes dans une section droite de poutre

Prenons comme coupure la section droite \mathcal{S} en G (voir figure 3.4). Soit M le point courant de \mathcal{S} . La coupure divise la poutre \mathcal{P} en deux parties \mathcal{P}_+ et \mathcal{P}_- . Toutes les facettes ds de centre M de cette coupure ont la même normale $\mathbf{n} = \mathbf{X}_1$.

Le torseur d'action de la partie \mathcal{P}_+ sur la partie \mathcal{P}_- est l'intégrale des contraintes sur la coupure \mathcal{S} et c'est aussi par définition le torseur intérieur en G . On peut donc écrire les égalités vectorielles :

$$\mathbf{R}_G = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{C}_M \mathbf{X}_1 ds = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_M \bar{\otimes} \mathbf{X}_1$$

$$\mathbf{M}_G = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{GM} \wedge \mathbf{C}_M \mathbf{X}_1 ds = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{GM} \wedge \boldsymbol{\sigma}_M \bar{\otimes} \mathbf{X}_1 ds$$

Si on détaille les composantes du tenseur des contraintes en M sur la base locale de la poutre $\{\mathbf{G}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ ⁹, on a :

$$[\boldsymbol{\sigma}_{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

En projetant les égalités vectorielles sur la base locale de la poutre en G , on obtient :

$$\begin{aligned} N &= \int_{\mathcal{S}} \sigma_{11} ds \\ T_2 &= \int_{\mathcal{S}} \sigma_{12} ds \\ T_3 &= \int_{\mathcal{S}} \sigma_{13} ds \\ M_t &= \int_{\mathcal{S}} x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12} ds \\ M_{f2} &= \int_{\mathcal{S}} x_3 \sigma_{11} ds \\ M_{f3} &= \int_{\mathcal{S}} -x_2 \sigma_{11} ds \end{aligned}$$

L'interprétation des composantes des $\boldsymbol{\sigma}$ est :

- σ_{11} est la contrainte normale pour une facette de \mathcal{S} . On l'appelle *champ des contraintes normales dans la section droite*.

8. voir note précédente.

9. On rappelle que la base locale est orthonormée, il n'y a donc pas lieu de distinguer les variances.

- $\sigma_{21} = \sigma_{12}$ est la composante sur \mathbf{X}_2 de la contrainte tangentielle pour la direction \mathbf{X}_1
- $\sigma_{31} = \sigma_{13}$ est la composante sur \mathbf{X}_3 de la contrainte tangentielle pour la direction \mathbf{X}_1
- $\boldsymbol{\tau} = \sigma_{12}\mathbf{X}_2 + \sigma_{13}\mathbf{X}_3$ est le vecteur contrainte tangentielle pour la direction \mathbf{X}_1 . On l'appelle *champ des contraintes tangentielles dans la section droite*.

Il est remarquable de constater qu'il suffit de connaître les champs σ_{11} , σ_{12} et σ_{13} dans la section droite (c'est à dire les contraintes dans la section droite pour la seule direction \mathbf{X}_1) pour déterminer complètement le torseur intérieur. Les termes σ_{23} et σ_{33} n'interviennent pas¹⁰.

Remarquer aussi que l'effort normal N et le vecteur moment de flexion \mathbf{M}_f ne dépendent que des contraintes normales dans la section droite (σ_{11}), alors que le vecteur effort tranchant \mathbf{T} et le moment de torsion M_t ne dépendent que des contraintes tangentielles dans la section droite (σ_{12} et σ_{13}).

Cependant, si on se donne la résultante \mathbf{R} et le moment \mathbf{M} du torseur des efforts intérieurs en G , il existe une infinité de champs de contraintes dans la section droite dont l'intégrale sur \mathcal{S} est égale au torseur intérieur.

La recherche du champ des contraintes associé au torseur intérieur est l'objet du chapitre suivant.

10. Cette constatation suggère fortement l'hypothèse de Saint-Venant qui sera faite au début du chapitre suivant.

Chapitre 4

Problème de Saint-Venant

Les restrictions sur la géométrie des poutres permettent d'assimiler un tronçon de poutre courbe de longueur dl à un tronçon de poutre droite de section constante. Les résultats de la théorie des poutres vont donc pouvoir se déduire de la résolution d'un problème d'élasticité tridimensionnelle sur un tronçon de poutre droite de section constante.

On en déduira la répartition des contraintes normales et tangentielles dans les sections droites en fonction du torseur intérieur, ainsi que des «lois de comportement» des poutres, c'est à dire des relations entre le torseur intérieur et les déplacements et les rotations des points de la ligne moyenne.

4.1 Définition du problème

Géométrie:

Soit un corps élastique, isotrope, de forme cylindrique, de longueur L , de section droite de forme quelconque \mathcal{S} . On note Ω le contour extérieur de \mathcal{S} et Ω_i les éventuels contours intérieurs.

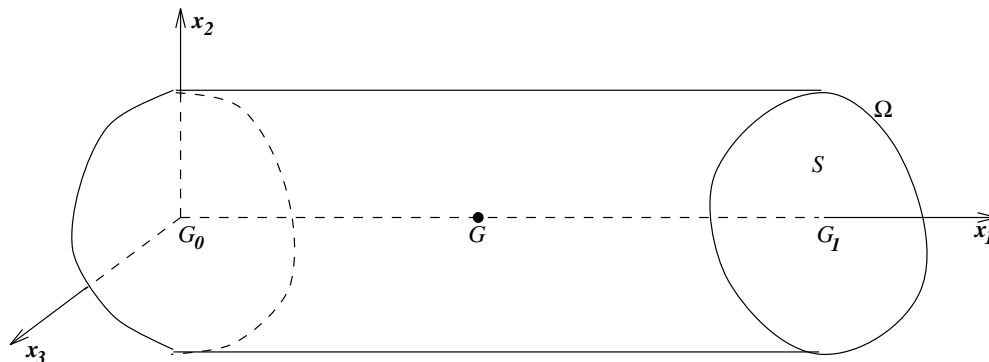


FIG. 4.1 – Le problème de Saint-Venant

On considère ce corps comme un tronçon de poutre. On choisit l'axe \mathbf{X}_1 sur la ligne moyenne (ligne des centres de gravité des sections). Les axes \mathbf{X}_2 et \mathbf{X}_3 sont choisis sur les directions principales d'inertie des sections droites.

Chargement :

La poutre est chargée sur sa section $x_1 = L$ par un torseur $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_{G_1} \\ \mathbf{M}_{G_1} \end{array} \right\}_{G_1}$, sans préciser exactement comment il est réparti sur cette section. Ce torseur représente l'action de la partie de poutre $x_1 > L$ sur le tronçon, c'est donc en fait le torseur intérieur en G_1 . On note $F_1, F_2, F_3, M_1, M_2, M_3$ les composantes de ce torseur sur la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$

D'autre part, la surface latérale du cylindre n'est pas chargée et les forces de volume sont nulles¹.

On en déduit immédiatement que le torseur intérieur au point $G = (x_1, 0, 0)$ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_G = \mathbf{F}_{G_1} \\ \mathbf{M}_G = \mathbf{M}_{G_1} + \mathbf{G}\mathbf{G}_1 \wedge \mathbf{F}_{G_1} \end{array} \right\}_G$$

dont les composantes sont :

$$\begin{aligned} N &= F_1 \\ T_2 &= F_2 \\ T_3 &= F_3 \\ M_t &= M_1 \\ M_{f2} &= M_2 - F_3(L - x_1) \\ M_{f3} &= M_3 + F_2(L - x_1) \end{aligned}$$

Le tronçon étant en équilibre, il est facile de voir, en écrivant l'équilibre du tronçon, que le torseur des actions extérieures au tronçon dans la section G_0 (action de la partie $x_1 < 0$ sur le tronçon) est le torseur :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{F}_{G_1} \\ -\mathbf{M}_{G_1} - \mathbf{G}_0\mathbf{G}_1 \wedge \mathbf{F}_{G_1} \end{array} \right\}_{G_0} = \left\{ \begin{array}{l} -F_1\mathbf{X}_1 - F_2\mathbf{X}_2 - F_3\mathbf{X}_3 \\ -M_1\mathbf{X}_1 - (M_2 - F_3L)\mathbf{X}_2 - (M_3 + F_2L)\mathbf{X}_3 \end{array} \right\}_{G_0}$$

Il est égal à l'opposé du torseur intérieur en G_0 .

4.2 Hypothèse de Saint-Venant

Le problème d'élasticité posé précédemment apparaît comme incomplètement défini. En effet, les conditions aux limites sur les sections droites \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 sont incomplètes car on n'a pas donné une condition en chaque point de ces sections, mais seulement une condition sur l'intégrale des contraintes sur ces sections. Il y a donc *a priori* une infinité de solutions.

L'hypothèse de Saint-Venant consiste à rechercher une solution telle que le tenseur des contraintes soit de la forme :

$$[\sigma_{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On verra plus loin qu'avec cette condition supplémentaire, on trouve bien un champ de tenseurs des contraintes unique.

1. Cela ne veut pas dire qu'on néglige toujours le poids des poutres. Mais puisque dans une modélisation en poutre on ne peut exercer des charges que sur la ligne moyenne, le poids propre sera donc modélisé par une densité linéique. Il apparaît donc dans le torseur intérieur.

4.3 Principe de Saint-Venant

Le champ de tenseurs des contraintes qui sera trouvé implique donc une certaine répartition des contraintes dans les sections droites \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 . Par exemple, en un point $M = (L, x_2, x_3)$ de la section \mathcal{S}_1 , la condition aux limites s'écrit :

$$\sigma_M \otimes \bar{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{q}$$

où \mathbf{q} est l'action extérieure au tronçon (une force par unité de surface) au point M . La résultante et le moment résultant en G_1 du champ \mathbf{q} sont égaux au torseur $\{\mathbf{F}_{G_1}, \mathbf{M}_{G_1}\}$.

Autrement dit, le torseur chargement $\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_{G_1} \\ \mathbf{M}_{G_1} \end{array} \right\}_{G_1}$, qu'on s'est donné doit être appliqué sur la section droite \mathcal{S}_1 suivant la répartition \mathbf{q} , sinon il n'y a pas de solution respectant l'hypothèse de Saint-Venant.

Le principe de Saint-Venant consiste à supposer que si le torseur $\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_{G_1} \\ \mathbf{M}_{G_1} \end{array} \right\}_{G_1}$ n'est pas réparti convenablement, la perturbation des quatre zéros n'est que locale. Autrement dit :

La solution de Saint-Venant est valable loin de la section d'application des charges.

On admet en pratique que la solution est correcte au delà de quelques diamètres².

4.4 Les équations du problème de Saint-Venant

Pour résoudre ce problème d'élasticité, on choisit la formulation en contraintes. Les équations à écrire sont donc les équations d'équilibre et les équations de Beltrami.

Les équations d'équilibre sont :

$$\operatorname{div} \sigma = \mathbf{0}$$

qui donnent sur la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ les trois équations scalaires :

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{13} = 0 \quad (4.1)$$

$$\partial_1 \sigma_{12} = 0 \quad (4.2)$$

$$\partial_1 \sigma_{13} = 0 \quad (4.3)$$

Les équations de Beltrami sont :

$$-\Delta \sigma - \frac{1}{1+\nu} \operatorname{grad} \operatorname{grad} \operatorname{Tr} \sigma + \frac{\nu}{1+\nu} \Delta \operatorname{Tr} \sigma \mathbf{G} = 0$$

2. Le principe de Saint-Venant n'est plus tout à fait un principe : Une thèse de Kamel Belkani à l'université de Bologne démontre qu'il n'est que partiellement vrai. Il a montré qu'en dehors de certaines répartitions \mathbf{q} particulières, les quatre valeurs non nulles s'amortissent exponentiellement avec la distance. Par contre, pour certaines répartitions particulières, dites "bimoments" (ce sont des répartitions \mathbf{q} de résultante nulle et de moment résultant nul), la perturbation ne s'amortit pas : Elle se conserve le long de la poutre.

qui donnent sur la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ les six équations scalaires :

$$-\Delta\sigma_{11} - \partial_{11}\sigma_{11} = 0 \quad (4.4)$$

$$-\Delta\sigma_{12} - \frac{1}{1+\nu}\partial_{12}\sigma_{11} = 0 \quad (4.5)$$

$$-\Delta\sigma_{13} - \frac{1}{1+\nu}\partial_{13}\sigma_{11} = 0 \quad (4.6)$$

$$-\partial_{22}\sigma_{11} + \nu\Delta\sigma_{11} = 0 \quad (4.7)$$

$$-\partial_{23}\sigma_{11} = 0 \quad (4.8)$$

$$-\partial_{33}\sigma_{11} + \nu\Delta\sigma_{11} = 0 \quad (4.9)$$

4.5 Résolution des contraintes

Intégration de σ_{11}

Les équations 4.4, 4.7 et 4.9 montrent que les termes $\partial_{11}\sigma_{11}$, $\partial_{22}\sigma_{11}$ et $\partial_{33}\sigma_{11}$ sont solution d'un système linéaire homogène et donc :

$$\partial_{11}\sigma_{11} = \partial_{22}\sigma_{11} = \partial_{33}\sigma_{11} = 0$$

Avec l'équation 4.8, on en déduit que la solution générale de σ_{11} est :

$$\sigma_{11} = a_1x_1 + a_0 + (b_1x_1 + b_0)x_2 + (c_1x_1 + c_0)x_3$$

Les constantes d'intégration de σ_{11} seront déterminées par les conditions aux limites.

Intégration de σ_{12} et σ_{13}

Les équations 4.2 et 4.3 montrent que σ_{12} et σ_{13} ne sont pas fonction de x_1 .

Compte tenu de la solution σ_{11} , l'équation 4.1 devient :

$$a_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + \partial_2\sigma_{12} + \partial_3\sigma_{13} = 0$$

soit encore

$$\frac{a_1}{2} + c_1x_3 + \partial_2\sigma_{12} = -\frac{a_1}{2} - b_1x_2 - \partial_3\sigma_{13}$$

et donc

$$\partial_2 \left[\frac{a_1}{2}x_2 + c_1x_2x_3 + \sigma_{12} + f(x_3) \right] = \partial_3 \left[-\frac{a_1}{2}x_3 - b_1x_2x_3 - \sigma_{13} - g(x_2) \right]$$

où $f(x_3)$ et $g(x_2)$ sont des fonctions continues dérivables *arbitraires*.

Il existe donc une fonction $\varphi(x_2, x_3)$ telle que

$$\partial_2\varphi = -\frac{a_1}{2}x_3 - b_1x_2x_3 - \sigma_{13} - g(x_2)$$

$$\partial_3\varphi = \frac{a_1}{2}x_2 + c_1x_2x_3 + \sigma_{12} + f(x_3)$$

et les contraintes σ_{12} et σ_{13} sont :

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \partial_3 \varphi - \frac{a_1}{2} x_2 - c_1 x_2 x_3 - f(x_3) \\ \sigma_{13} &= -\partial_2 \varphi - \frac{a_1}{2} x_3 - b_1 x_2 x_3 - g(x_2)\end{aligned}$$

Il reste les équations 4.5 et 4.6 qui donnent une condition sur φ :

$$\begin{aligned}\partial_3 \Delta \varphi &= -\frac{1}{1+\nu} b_1 + \partial_{33} f \\ \partial_2 \Delta \varphi &= -\frac{1}{1+\nu} c_1 - \partial_{22} g\end{aligned}$$

soit encore

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{1+\nu} b_1 x_3 + \frac{1}{1+\nu} c_1 x_2 + \partial_3 f - \partial_2 g + A$$

$f(x_3)$ et $g(x_2)$ étant arbitraires, on choisit :

$$\begin{aligned}f(x_3) &= \frac{1}{1+\nu} b_1 \frac{x_3^2}{2} \\ g(x_2) &= \frac{1}{1+\nu} c_1 \frac{x_2^2}{2}\end{aligned}$$

$\varphi(x_2, x_3)$ est donc solution de l'équation :

$$\boxed{\Delta \varphi = A}$$

et les contraintes σ_{12} et σ_{13} sont :

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_{12} &= \partial_3 \varphi - \frac{a_1}{2} x_2 - c_1 x_2 x_3 - \frac{1}{1+\nu} b_1 \frac{x_3^2}{2} \\ \sigma_{13} &= -\partial_2 \varphi - \frac{a_1}{2} x_3 - b_1 x_2 x_3 - \frac{1}{1+\nu} c_1 \frac{x_2^2}{2}\end{aligned}}$$

Le calcul de σ_{12} et σ_{13} se ramène donc à la recherche d'une fonction $\varphi(x_2, x_3)$ à laplacien constant A sur la section droite. La solution générale ne peut être donnée ici, puisqu'elle dépend de la forme de la section.

4.6 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont à écrire sur toute la frontière.

Sur la section \mathcal{S}_0 :

La normale extérieure est $-\mathbf{X}_1$, les efforts extérieurs sont $\mathbf{q} = -\sigma \overline{\otimes} \mathbf{X}_1$, Leur intégrale sur \mathcal{S}_0 être équivalente au torseur $\left\{ \begin{array}{c} -\mathbf{F}_{G_1} \\ -\mathbf{M}_{G_1} - \mathbf{G}_0 \mathbf{G}_1 \wedge \mathbf{F}_{G_1} \end{array} \right\}_{G_0}$

$$-\int_{\mathcal{S}_0} \sigma \overline{\otimes} \mathbf{X}_1 ds = -\mathbf{F}_{G_1}$$

et

$$-\int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{G}_0 \mathbf{M} \wedge \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{X}_1 ds = -\mathbf{M}_{G_1} - \mathbf{G}_0 \mathbf{G}_1 \wedge \mathbf{F}_{G_1}$$

c'est à dire les six équations scalaires :

$$-\int_{\mathcal{S}_0} \sigma_{11} ds = -F_1 \quad (4.10)$$

$$-\int_{\mathcal{S}_0} \sigma_{12} ds = -F_2 \quad (4.11)$$

$$-\int_{\mathcal{S}_0} \sigma_{13} ds = -F_3 \quad (4.12)$$

$$\int_{\mathcal{S}_0} -x_2 \sigma_{13} + x_3 \sigma_{12} ds = -M_1 \quad (4.13)$$

$$\int_{\mathcal{S}_0} -x_3 \sigma_{11} ds = -(M_2 - F_3 L) \quad (4.14)$$

$$\int_{\mathcal{S}_0} x_2 \sigma_{11} ds = -(M_3 + F_2 L) \quad (4.15)$$

Sur la section \mathcal{S}_1 :

La normale extérieure est \mathbf{X}_1 , les efforts extérieurs sont $\mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{X}_1$, Leur intégrale sur \mathcal{S}_1 doit être équivalente au torseur $\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_{G_1} \\ \mathbf{M}_{G_1} \end{array} \right\}_{G_1}$

$$\int_{\mathcal{S}_1} \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{X}_1 ds = \mathbf{F}_{G_1}$$

et

$$\int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{G}_1 \mathbf{M} \wedge \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{X}_1 ds = \mathbf{M}_{G_1}$$

c'est à dire les six équations scalaires :

$$\int_{\mathcal{S}_1} \sigma_{11} ds = F_1 \quad (4.16)$$

$$\int_{\mathcal{S}_1} \sigma_{12} ds = F_2 \quad (4.17)$$

$$\int_{\mathcal{S}_1} \sigma_{13} ds = F_3 \quad (4.18)$$

$$\int_{\mathcal{S}_1} x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12} ds = M_1 \quad (4.19)$$

$$\int_{\mathcal{S}_1} x_3 \sigma_{11} ds = M_2 \quad (4.20)$$

$$\int_{\mathcal{S}_1} -x_2 \sigma_{11} ds = M_3 \quad (4.21)$$

Sur la surface latérale :

La normale extérieure est $\mathbf{n} = (0, n_2, n_3)$, les efforts extérieurs sont nuls :

$$\sigma \overline{\otimes} \mathbf{n} = (\sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3) \mathbf{X}_1 + 0\mathbf{X}_2 + 0\mathbf{X}_3 = \mathbf{0}$$

et donc

$$\sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = 0$$

Or, le vecteur $\boldsymbol{\tau} = \sigma_{12}\mathbf{X}_2 + \sigma_{13}\mathbf{X}_3$ est la partie tangentielle de la contrainte *dans la section droite* (c'est à dire la partie tangentielle de $\sigma \overline{\otimes} \mathbf{X}_1$), la condition de surface latérale implique donc qu'il est perpendiculaire à \mathbf{n} et donc tangent au contour Ω .

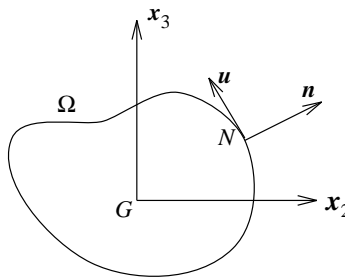


FIG. 4.2 – Condition aux limites sur le contour de la section droite

La condition aux limites peut donc aussi s'écrire :

$$\boldsymbol{\tau} \wedge d\mathbf{N} = \mathbf{0} \quad \forall N \in \Omega \tag{4.22}$$

Ainsi, sur la surface latérale d'une poutre, le vecteur contrainte tangentielle dans la section droite est tangent au contour.

Exploitation :

Le lecteur vérifiera sans difficulté les résultats suivants³ :

Les conditions 4.10 et 4.16 conduisent à :

$$a_0 = \frac{F_1}{S} = ; a_1 = 0$$

Les conditions 4.14, 4.15, 4.20 et 4.21 conduisent à :

$$b_0 = \frac{-M_3 - F_2L}{I_3} ; c_0 = \frac{M_2 - F_3L}{I_2} ; b_1 = \frac{F_2}{I_3} ; c_1 = \frac{F_3}{I_2}$$

L'expression complètement déterminée de σ_{11} est donc :

$$\sigma_{11} = \frac{F_1}{S} + \frac{M_2 - F_3(L - x_1)}{I_2} x_3 - \frac{M_3 + F_2(L - x_1)}{I_3} x_2$$

3. En tenant compte du fait que les axes \mathbf{X}_2 et \mathbf{X}_3 sont centraux principaux pour les sections droites. Les moments statiques $\int_S x_2 ds$ et $\int_S x_3 ds$ sont nuls, et les moments d'inertie principaux sont $I_2 = \int_S x_3^2 ds$, $I_3 = \int_S x_2^2 ds$ avec $\int_S x_2 x_3 ds = 0$.

soit encore, en fonction des composantes du torseur intérieur en G :

$$\sigma_{11} = \frac{N}{S} + \frac{M_{f2}}{I_2}x_3 - \frac{M_{f3}}{I_3}x_2$$

La condition 4.22 conduit à une condition que doit respecter $\varphi(x_2, x_3)$ sur le contour Ω :

$$d\varphi = \left[-\frac{T_2}{I_3}x_2x_3 - \frac{T_3}{I_2}\frac{x_2^2}{2(1+\nu)} \right] dx_2 + \left[\frac{T_3}{I_2}x_2x_3 + \frac{T_2}{I_3}\frac{x_3^2}{2(1+\nu)} \right] dx_3$$

Ainsi, dans une section droite, la valeur de $\varphi(x_2, x_3)$ est imposée sur le contour (à une constante près)⁴.

Les conditions 4.11, 4.12, 4.17 et 4.18 sont identiquement vérifiées si la condition 4.22 est satisfaite.

La condition 4.19 conduit à :

$$M_t = \int_S (-x_2\partial_2\varphi - x_3\partial_3\varphi) ds + \frac{T_2}{I_3} \int_S \left(-x_2^2x_3 + \frac{x_3^2}{2(1+\nu)} \right) ds + \frac{T_3}{I_2} \int_S \left(-x_2x_3^2 + \frac{x_2^2}{2(1+\nu)} \right) ds$$

C'est cette équation qui détermine la constante A .

Le lecteur pourra vérifier (en transformant la première intégrale) qu'elle peut aussi s'écrire :

$$M_t = 2 \int_S \varphi ds + \int_{\Omega} \varphi (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) + \frac{T_2}{I_3} \int_S \left(-x_2^2x_3 + \frac{x_3^2}{2(1+\nu)} \right) ds + \frac{T_3}{I_2} \int_S \left(-x_2x_3^2 + \frac{x_2^2}{2(1+\nu)} \right) ds \quad (4.23)$$

4.7 Résumé des résultats sur les contraintes

Dans une section droite de poutre où les composantes du torseur intérieur sur le repère local sont $\{N, T_2, T_3, M_t, M_{f2}, M_{f3}\}$, on a les résultats suivants :

- Le tenseur des contraintes dans la base locale est de la forme :

$$[\sigma_{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les contraintes dans la section droite (de normale \mathbf{X}_1) sont :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}$$

La contrainte normale dans la section droite est :

$$\mathbf{X}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_1) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1) = \sigma_{11}$$

Le vecteur contrainte tangentielle dans la section droite est :

$$\boldsymbol{\tau} = \sigma_{12}\mathbf{X}_2 + \sigma_{13}\mathbf{X}_3$$

4. Le lecteur est invité à vérifier que la fonction φ est bien continue sur Ω , c'est à dire qu'on retrouve la même valeur après un tour ($\int_{\Omega} d\varphi ds = 0$). Cette affirmation est encore vraie s'il existe des contours intérieurs.

– Les composantes de σ s'expriment en fonction du torseur intérieur :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{N}{S} + \frac{M_{f2}}{I_2}x_3 - \frac{M_{f3}}{I_3}x_2 \\ \sigma_{12} &= \partial_3\varphi - \frac{T_3}{I_2}x_2x_3 - \frac{1}{1+\nu}\frac{T_2}{I_3}\frac{x_3^2}{2} \\ \sigma_{13} &= -\partial_2\varphi - \frac{T_2}{I_3}x_2x_3 - \frac{1}{1+\nu}\frac{T_3}{I_2}\frac{x_2^2}{2}\end{aligned}$$

où φ est une fonction de x_2 et x_3 , définie à une constante près, dépendant de la forme de la section droite et solution du problème suivant :

– φ est solution de l'équation différentielle :

$$\Delta\varphi = A$$

– La valeur de φ sur le(s) contour(s) est imposée par :

$$d\varphi = \left[-\frac{T_2}{I_3}x_2x_3 - \frac{T_3}{I_2}\frac{x_2^2}{2(1+\nu)} \right] dx_2 + \left[\frac{T_3}{I_2}x_2x_3 + \frac{T_2}{I_3}\frac{x_3^2}{2(1+\nu)} \right] dx_3$$

(Ne pas oublier que sur le contour, dx_2 et dx_3 sont liés.)

– La constante A est déterminée par :

$$\begin{aligned}M_t &= 2 \int_S \varphi ds + \int_{\Omega} \varphi (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) \dots \\ &+ \frac{T_2}{I_3} \int_S \left(-x_2^2 x_3 + \frac{x_3^2}{2(1+\nu)} \right) ds + \frac{T_3}{I_2} \int_S \left(-x_2 x_3^2 + \frac{x_2^2}{2(1+\nu)} \right) ds\end{aligned}$$

A dépend donc de M_t , T_2 et T_3 .

4.8 Propriétés du champ des contraintes tangentielles

Dans le plan de la section droite, le champ τ a des propriétés intéressantes qui permettent d'avoir des renseignements sur τ sans connaître φ .

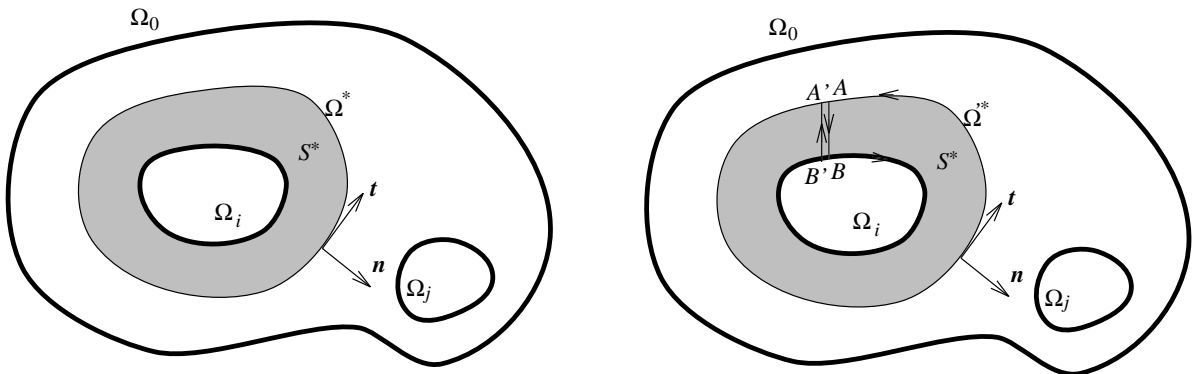


FIG. 4.3 – Propriétés des contraintes tangentielles dans la section droite

Soit un contour fermé Ω^* entièrement compris dans la section S , entourant une portion S^* de S .

4.8.1 Circulation de $\boldsymbol{\tau}$ le long de Ω^*

Le contour Ω^* (Ω^* complété par les chemins confondus AB et $B'A'$) entoure une zone simplement connexe. Le théorème de Stokes permet d'écrire :

$$\int_{\Omega^*} \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{S}^*} \mathbf{X}_1 \cdot \text{rot } \boldsymbol{\tau} \, ds = \int_{\mathcal{S}^*} (\partial_2 \sigma_{13} - \partial_3 \sigma_{12}) \, ds$$

En remplaçant σ_{12} et σ_{13} par leurs valeurs :

$$\int_{\Omega^*} \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{l} = -A\mathcal{S}^* + \frac{\nu}{1+\nu} \left[\frac{T_2}{I_3} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_3) - \frac{T_3}{I_2} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_2) \right]$$

Or, par définition de Ω^* ,

$$\int_{\Omega'^*} \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Omega^*} \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{l} + \int_A^B \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{l} + \int_{-\Omega_i} \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{l} + \int_{B'}^{A'} \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Omega^*} \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{l}$$

où \int_{Ω_i} désigne la circulation sur le contour intérieur.

On en tire la circulation cherchée :

$$\int_{\Omega^*} \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{l} = -A\mathcal{S}^* + \frac{\nu}{1+\nu} \left[\frac{T_2}{I_3} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_3) - \frac{T_3}{I_2} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_2) \right] + \sum_i \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{l}$$

où le dernier terme est la somme des circulations de $\boldsymbol{\tau}$ le long des contours intérieurs décrits dans le sens positif.

4.8.2 Flux de $\boldsymbol{\tau}$ à travers Ω^*

De la même manière que pour la circulation, on calcule d'abord le flux de $\boldsymbol{\tau}$ à travers Ω'^* . Le théorème de la divergence permet d'écrire :

$$\int_{\Omega'^*} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, dl = \int_{\mathcal{S}^*} \text{div } \boldsymbol{\tau} \, ds = \int_{\mathcal{S}^*} (\partial_2 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{13}) \, ds$$

$\boldsymbol{\tau}$ étant tangent au contour, son flux à travers les contours intérieurs est nul.

On obtient donc :

$$\int_{\Omega'^*} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, dl = -\frac{T_2}{I_3} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_3) - \frac{T_3}{I_2} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_2)$$

4.9 Déformations et déplacements

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ étant connu, la loi de comportement élastique isotrope donne le tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\epsilon}$:

$$[\boldsymbol{\epsilon}_{\bullet\bullet}] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & (1+\nu)\sigma_{12} & (1+\nu)\sigma_{13} \\ (1+\nu)\sigma_{12} & -\nu\sigma_{11} & 0 \\ (1+\nu)\sigma_{13} & 0 & -\nu\sigma_{11} \end{bmatrix}$$

Il existe bien un champ de déplacement $\boldsymbol{\xi}$ tel que $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\mathbf{grad} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{grad}^t \boldsymbol{\xi}]$, car les équations de Beltrami garantissent l'intégrabilité de $\boldsymbol{\epsilon}$.

Pour calculer $\boldsymbol{\xi}$, on utilise la méthode standard vue en mécanique des milieux continus : on calcule d'abord le tenseur des rotations antisymétrique $\boldsymbol{\Omega}$, puis le champ $\boldsymbol{\xi}$.

Calcul des rotations :

Ω est solution de

$$\mathbf{grad}\Omega = -\mathbf{E} \overline{\otimes} \mathbf{rot}^t \mathbf{D}$$

En coordonnées cartésiennes, les composantes de Ω sont solution des équations différentielles :

$$d\Omega_{ij} = (\partial_j \epsilon_{ik} - \partial_i \epsilon_{kj}) dx_k$$

Ω étant antisymétrique il suffit de calculer Ω_{12} , Ω_{23} et Ω_{31}

Par exemple, pour Ω_{12} :

$$d\Omega_{12} = (\partial_2 \epsilon_{1k} - \partial_1 \epsilon_{k2}) dx_k$$

qui équivaut aux trois équations différentielles :

$$\begin{aligned} \partial_1 \Omega_{12} &= \partial_2 \epsilon_{11} - \partial_1 \epsilon_{12} \\ \partial_2 \Omega_{12} &= \partial_2 \epsilon_{12} - \partial_1 \epsilon_{22} \\ \partial_3 \Omega_{12} &= \partial_2 \epsilon_{13} - \partial_1 \epsilon_{32} \end{aligned}$$

Le lecteur vérifiera sans difficulté, en remplaçant ϵ puis σ par leurs valeurs, qu'on obtient :

$$\Omega_{12} = \frac{1+\nu}{E} (\partial_3 \varphi - Ax_3) + \frac{T_2}{EI_3} \left(\nu \frac{x_2^2}{2} - (1+\nu) \frac{x_3^2}{2} \right) - \frac{T_3}{EI_2} x_2 x_3 - \frac{T_2}{EI_3} \left(Lx_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) - \frac{M_3}{EI_3} x_1 + \gamma$$

De même, on obtient :

$$\Omega_{23} = -\nu \frac{T_2}{EI_3} x_3 (L - x_1) - \nu \frac{M_3}{EI_3} x_3 + \nu \frac{T_3}{EI_2} x_2 (L - x_1) - \nu \frac{M_2}{EI_2} x_2 + \frac{1+\nu}{E} Ax_1 + \alpha$$

et

$$\Omega_{31} = \frac{1+\nu}{E} (\partial_2 \varphi - Ax_2) + \frac{T_3}{EI_2} \left((1+\nu) \frac{x_2^2}{2} - \nu \frac{x_3^2}{2} \right) - \frac{T_2}{EI_3} x_2 x_3 + \frac{T_3}{EI_2} \left(Lx_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) - \frac{M_2}{EI_2} x_1 + \beta$$

On introduit le *vecteur rotation*⁵ de la particule en M :

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \overline{\otimes} \Omega$$

dont les composantes sont :

$$R_1 = \Omega_{23} \quad R_2 = \Omega_{31} \quad R_3 = \Omega_{12}$$

Calcul des déplacements :

Le champ des déplacements est solution de l'équation différentielle

$$\mathbf{grad}\xi = \epsilon + \Omega$$

5. c'est le tenseur adjoint au tenseur antisymétrique Ω .

soit, en coordonnées cartésiennes :

$$d\xi_i = (\epsilon_{ij} + \Omega_{ij}) dx_j$$

Par exemple, pour le calcul de ξ_1 :

$$d\xi_1 = (\epsilon_{1j} + \Omega_{1j}) dx_j$$

ce qui équivaut aux trois équations différentielles :

$$\begin{aligned} \partial_1 \xi_1 &= \epsilon_{11} + \Omega_{11} = \epsilon_{11} \\ \partial_2 \xi_1 &= \epsilon_{12} + \Omega_{12} \\ \partial_3 \xi_1 &= \epsilon_{13} + \Omega_{13} \end{aligned}$$

dont la solution est :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{N}{ES} x_1 - \left(\frac{T_2}{EI_3} x_2 + \frac{T_3}{EI_2} x_3 \right) \left(L x_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) + x_1 \left(\frac{M_2}{EI_2} x_3 - \frac{M_3}{EI_3} x_2 \right) \dots \\ &\dots + \frac{T_2}{EI_3} \left[\nu \frac{x_2^3}{6} - (2 + \nu) \frac{x_2 x_3^2}{2} \right] + \frac{T_3}{EI_2} \left[\nu \frac{x_3^3}{6} - (2 + \nu) \frac{x_2^2 x_3}{2} \right] \dots \\ &\dots + \frac{1 + \nu}{E} Z(x_2, x_3) + \gamma x_2 - \beta x_3 + \alpha_0 \end{aligned}$$

La fonction $\varphi(x_2, x_3)$ dépendant de la forme de la section droite, on a introduit une fonction $Z(x_2, x_3)$ pour pouvoir écrire la solution. La fonction $Z(x_2, x_3)$ est solution du système différentiel :

$$\begin{aligned} \partial_2 Z &= 2\partial_3 \varphi - A x_3 \\ \partial_3 Z &= -2\partial_2 \varphi + A x_2 \end{aligned}$$

soit encore vectoriellement :

$$\boxed{\text{grad } Z = (2\text{grad } \varphi - A \mathbf{GM}) \wedge \mathbf{X}_1}$$

Remarques :

- $Z(x_2, x_3)$ est définie à une constante près qui joue le même rôle que α_0 . On peut donc prendre par exemple $Z(0, 0) = 0$.
- On est assuré de l'existence de $Z(x_2, x_3)$, car on a bien $\partial_{23} Z = \partial_{32} Z$
- $Z(x_2, x_3)$ est une fonction harmonique.

Le calcul de ξ_2 et ξ_3 est plus simple car φ n'intervient pas dans les équations. On obtient :

$$\begin{aligned} \xi_2 &= -\nu \frac{N}{ES} x_3 + \nu (L - x_1) \left[\frac{T_2}{2EI_3} (x_2^2 - x_3^2) + \frac{T_3}{EI_2} x_2 x_3 \right] \dots \\ &\dots + \nu \left[\frac{M_3}{2EI_3} (x_2^2 - x_3^2) - \frac{M_2}{EI_2} x_2 x_3 \right] + \frac{1 + \nu}{E} A x_1 x_3 \dots \\ &\dots + \left[\frac{M_3}{EI_3} + \frac{T_2}{EI_3} \left(L - \frac{x_1}{3} \right) \right] \frac{x_1^2}{2} - \gamma x_1 + \alpha x_3 + \beta_0 \\ \xi_3 &= -\nu \frac{N}{ES} x_3 + \nu (L - x_1) \left[\frac{T_3}{2EI_2} (x_3^2 - x_2^2) + \frac{T_2}{EI_3} x_2 x_3 \right] \dots \\ &\dots + \nu \left[-\frac{M_2}{2EI_2} (x_3^2 - x_2^2) + \frac{M_3}{EI_3} x_2 x_3 \right] - \frac{1 + \nu}{E} A x_1 x_2 \dots \\ &\dots + \left[-\frac{M_2}{EI_2} + \frac{T_3}{EI_2} \left(L - \frac{x_1}{3} \right) \right] \frac{x_1^2}{2} + \beta x_1 - \alpha x_2 + \gamma_0 \end{aligned}$$

Les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ qui apparaissent dans le champ ξ définissent un champ de déplacement de solide. En effet, tout champ de déplacement calculé à partir d'un tenseur de déformations est défini à un champ de déplacement de solide près.

4.10 Application de la solution de Saint-Venant aux poutres

Le champ de déplacements trouvé est un champ dans tout le volume de la poutre. En théorie des poutres, on ne s'intéresse qu'aux mouvements des points de la ligne moyenne. On définit donc :

- La rotation des points de la ligne moyenne :

$$\omega = \mathbf{R}(x_1, 0, 0)$$

- Le déplacement des points de la ligne moyenne :

$$\mathbf{u} = \xi(x_1, 0, 0)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -Ax_1 \frac{1+\nu}{E} - \frac{\alpha}{E} \\ \omega_2 &= -\partial_2 \varphi(0, 0) \frac{1+\nu}{E} - \left(Lx_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) \frac{F_3}{EI_2} + x_1 \frac{M_2}{EI_2} - \frac{\beta}{E} \\ \omega_3 &= -\partial_3 \varphi(0, 0) \frac{1+\nu}{E} + \left(Lx_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) \frac{F_2}{EI_3} + x_1 \frac{M_3}{EI_3} - \frac{\gamma}{E} \\ u_1 &= x_1 \frac{N}{ES} + \frac{\alpha_0}{E} \\ u_2 &= x_1^2 \frac{M_3}{2EI_3} + \frac{x_1^2}{2} \left(L - \frac{x_1}{3} \right) \frac{F_2}{EI_3} - x_1 \frac{\gamma}{E} + \frac{\beta_0}{E} \\ u_3 &= -x_1^2 \frac{M_2}{2EI_2} + \frac{x_1^2}{2} \left(L - \frac{x_1}{3} \right) \frac{F_3}{EI_2} + x_1 \frac{\beta}{E} + \frac{\gamma_0}{E} \end{aligned}$$

Pour éliminer les constantes dues au champ de déplacement de solide, on dérive ces résultats par rapport à x_1 . On voit alors apparaître les composantes du torseur des efforts intérieurs, et on obtient finalement les *lois de comportement des poutres* qui donnent l'évolution de la rotation ω et du déplacement \mathbf{u} le long de la ligne moyenne :

- Evolution de la rotation de torsion (en radians/m) en fonction de x_1 :

$$\boxed{\frac{d\omega_1}{dx_1} = -A \frac{1+\nu}{E} = -\frac{A}{2G}}$$

où on a posé $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ($= \mu$ le coefficient de Lamé)⁶.

- Evolution de la rotation de flexion en fonction de x_1 :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\omega_2}{dx_1} &= \frac{M f_2(x_1)}{EI_2} \\ \frac{d\omega_3}{dx_1} &= \frac{M f_3(x_1)}{EI_3} \end{aligned}}$$

6. Cette notation est utilisée dans tous les traités de théorie des poutres. G est souvent appelé *module d'élasticité transversal* ou *module de cisaillement*

soit encore sous forme vectorielle :

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_{23}}{dx_1} = \frac{Mf_2(x_1)}{EI_2}\mathbf{X}_2 + \frac{Mf_3(x_1)}{EI_3}\mathbf{X}_3$$

où $\boldsymbol{\omega}_{23}$ est la rotation de flexion $\boldsymbol{\omega}_{23} = \omega_2\mathbf{X}_2 + \omega_3\mathbf{X}_3$.

– Evolution du déplacement longitudinal en fonction de x_1 (allongement de la ligne moyenne) :

$$\frac{du_1}{dx_1} = \frac{N(x_1)}{ES}$$

– Evolution du déplacement transversal en fonction de x_1 :

$$\begin{cases} \frac{d^2u_2}{dx_1^2} = \frac{Mf_3(x_1)}{EI_3} \\ \frac{d^2u_3}{dx_1^2} = -\frac{Mf_2(x_1)}{EI_2} \end{cases}$$

Ces équations différentielles permettent de calculer les rotations et les déplacements des points de la ligne moyenne d'une poutre droite, en fonction des composantes du torseur des efforts intérieurs⁷.

4.11 Application aux poutres de faible courbure

Connaissant le torseur des efforts intérieurs dans une section, le problème de Saint-Venant a permis de calculer le champ du tenseur des contraintes dans cette section. De plus, on sait calculer les évolutions le long de la ligne moyenne de la rotation et du déplacement des points de la ligne moyenne.

Ces résultats ont été établis pour une poutre de ligne moyenne rectiligne, et de section droite quelconque. Pour les poutres droites, on calcule les rotations et les déplacements de tout point de la ligne moyenne par simple intégration des lois de comportement.

On va étendre ces résultats aux poutres courbes, en supposant que chaque tronçon de poutre courbe de longueur dl se comporte comme un tronçon de poutre droite. Cette approximation est correcte si la courbure est faible, ou plus précisément, si les dimensions transversales d de la section droite restent petites devant le rayon de courbure R de la ligne moyenne.

$$d \ll R$$

Il ne faut pas oublier que pour les poutres courbes, la base locale $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ n'est plus constante le long de la ligne moyenne. Les lois de comportement précédentes doivent être réinterprétées : Elles donnent les dérivées par rapport à l'abscisse curviligne du vecteur rotation et du vecteur déplacement, en fonction des composantes du torseur intérieur sur la base locale.

Considérons une poutre courbe, et deux points quelconques A et B sur la ligne moyenne. On note l l'abscisse curviligne le long de la ligne moyenne. On considère le tronçon AB et on note $\boldsymbol{\omega}_A$ et \mathbf{u}_A le vecteur rotation et le vecteur déplacement du point A . On se propose de calculer la rotation et le déplacement du point B .

⁷. Le moment de torsion M_t n'apparaît pas explicitement. Il faut se rappeler que la constante A est déterminée par une condition aux limites 4.23 faisant intervenir M_t , T_2 et T_3 . Elle est donc fonction du moment de torsion et de l'effort tranchant. On aperçoit ici la possibilité de voir une poutre se tordre même si le moment de torsion est nul.

Le torseur intérieur est $\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R}_G(l) \\ \mathbf{M}_G(l) \end{array} \right\}_G$, et l'évolution le long de la ligne moyenne du vecteur rotation et du vecteur déplacement provoqués par ce torseur intérieur sont maintenant $\frac{d\boldsymbol{\omega}(l)}{dl}$ et $\frac{d\mathbf{u}(l)}{dl}$

Le mouvement du point B est la superposition de deux mouvements :

- celui dû au mouvement du point A
- celui dû à la déformation de la poutre entre A et B .

La rotation de B est donc donnée par :

$$\boldsymbol{\omega}_B = \boldsymbol{\omega}_A + \int_A^B \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}(l)}{dl} \right) dl$$

et le déplacement de B est donné par :

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A + \boldsymbol{\omega}_A \wedge \mathbf{AB} + \int_A^B \left(\frac{d\mathbf{u}(l)}{dl} \right) dl + \int_A^B \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}(l)}{dl} \wedge \mathbf{GB} \right) dl$$

où G est le point courant entre A et B

et $\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}(l)}{dl} \right) \wedge \mathbf{GB}$ est le déplacement élémentaire de B dû à la rotation de déformation élémentaire au point G .

Si on remplace en fonction du torseur des efforts intérieurs :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dl} = \frac{N}{ES} \mathbf{t} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dl} = \frac{M_t}{GJ} \mathbf{t} + \frac{dM_{f2}}{E I_2} \mathbf{X}_2 + \frac{dM_{f3}}{E I_3} \mathbf{X}_3$$

où J est une constante fonction de la forme de la section droite qui sera précisée lors de l'étude de la torsion.

On obtient :

$$\boldsymbol{\omega}_B = \boldsymbol{\omega}_A + \int_A^B \left(\frac{M_t}{GJ} \mathbf{t} + \frac{dM_{f2}}{E I_2} \mathbf{X}_2 + \frac{dM_{f3}}{E I_3} \mathbf{X}_3 \right) dl$$

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A + \boldsymbol{\omega}_A \wedge \mathbf{AB} + \int_A^B \frac{N}{ES} \mathbf{t} dl + \int_A^B \left(\frac{M_t}{GJ} \mathbf{t} + \frac{dM_{f2}}{E I_2} \mathbf{X}_2 + \frac{dM_{f3}}{E I_3} \mathbf{X}_3 \right) \wedge \mathbf{GB} dl$$

Ces deux formules sont appelées *formules de Bresse*. Elles permettent de calculer la rotation et le déplacement d'un point B quand on connaît la rotation et le déplacement d'un point A . Lorsqu'on travaille sur des poutres courbes, la loi de comportement est utilisée plutôt sous cette forme.

Il est important de noter que ces intégrales sont des intégrales *vectérielles*. Pour les calculer, il faut généralement les projeter sur une base globale fixe.

4.12 Conclusion

Connaissant le torseur intérieur en tout point d'une poutre, on sait calculer le champ du tenseur des contraintes dans toute section droite. Les lois de comportement, sous forme différentielle ou

sous forme intégrée (formules de Bresse), permettent de calculer la rotation et le déplacement de tout point de la ligne moyenne.

Les chapitres qui suivent ne sont qu'une exploitation de ces résultats. La théorie des poutres étant une application de la théorie de l'élasticité, on a à notre disposition le théorème de superposition. On étudiera donc séparément les effets de chacune des composantes du torseur des efforts intérieurs. On étudiera donc successivement les effets

- de l'effort normal N
- du moment de flexion M_f
- du moment de torsion M_t
- de l'effort tranchant T

Dans chaque cas, on déterminera les contraintes et les déformations dans la section⁸.

Si la section subit plusieurs composantes de torseur intérieur, il suffit de superposer leurs effets.

⁸. Comme le montrent les lois de comportement des poutres, les déplacements et les rotations dépendent de la forme de la ligne moyenne, puisqu'il faut intégrer le long de cette ligne pour les calculer.

Chapitre 5

Etude de l'effort normal

On se propose ici d'étudier les contraintes et les déformations dans une section droite de poutre uniquement soumise à un effort normal (traction ou compression).

5.1 Résultats de Saint-Venant

On reprend les résultats de Saint-Venant en posant $T = 0$, $M_f = 0$ et $M_t = 0$.

5.1.1 Champ du tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes dû à N est :

$$\sigma_{11} = \frac{N}{S} ; \sigma_{12} = \partial_3 \varphi ; \sigma_{13} = -\partial_2 \varphi$$

où φ est une fonction de x_2 et de x_3 , solution de

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= A \\ d\varphi &= 0 \text{ sur le contour } \Omega \\ A \text{ déterminé par : } 0 &= 2 \int_S \varphi ds + \int_{\Omega} \varphi (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) \end{aligned}$$

La fonction φ est donc indépendante de N . *A priori* il peut donc exister des contraintes tangentielles dans une section non chargée ! Si elles existent, elles sont dues à l'histoire du matériau avant son chargement¹.

En élasticité, on ne calcule que les contraintes dues au chargement. S'il existait des précontraintes, il faut les ajouter à celles dues au chargement pour avoir l'état des contraintes réel.

Si la section droite est simplement connexe, la démonstration qui suit montre que la fonction φ est nécessairement constante et donc que σ_{12} et σ_{13} sont nuls. Par contre, s'il y a plusieurs contours (1 contour extérieur et des contours intérieurs) des précontraintes peuvent exister.

1. par exemple, ce sont des contraintes résiduelles dues au mode de fabrication de la poutre. La connaissance de ces contraintes est difficile, voire impossible. Pour les métaux, il existe toutefois des traitements thermiques qui les réduisent.

Démonstration:

Soit \mathcal{S} une section simplement connexe de contour unique Ω . La condition sur le contour implique $\varphi = \varphi_0$ sur Ω . Les contraintes tangentielles étant fonctions des dérivés de φ , φ est définie à une constante près, on prend donc $\varphi_0 = 0$. On cherche donc une fonction $\varphi(x_2, x_3)$ telle que :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= A \\ \varphi &= 0 \text{ sur } \Omega \\ \int_{\mathcal{S}} \varphi \, ds &= 0 \end{aligned}$$

On a donc

$$0 = \int_{\mathcal{S}} \varphi \, ds = \int_{\mathcal{S}} \varphi A \, ds = \int_{\mathcal{S}} \varphi \Delta\varphi \, ds = \int_{\mathcal{S}} \varphi \operatorname{div} \mathbf{grad}\varphi \, ds = \int_{\mathcal{S}} \operatorname{div}(\varphi \mathbf{grad}\varphi) \, ds - \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{grad}\varphi)^2 \, ds$$

Or, en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_{\mathcal{S}} \operatorname{div}(\varphi \mathbf{grad}\varphi) \, ds = \int_{\Omega} \varphi \mathbf{grad}\varphi \otimes \bar{\mathbf{n}} \, dl = \varphi_0 \int_{\Omega} \mathbf{grad}\varphi \otimes \bar{\mathbf{n}} \, dl = 0$$

On a donc

$$\int_{\mathcal{S}} (\mathbf{grad}\varphi)^2 \, ds = 0 \Rightarrow \mathbf{grad}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = Cte = \varphi_0 = 0$$

Pour une section simplement connexe, les contraintes tangentielles sont donc nulles.

Cette démonstration tombe en défaut pour une section droite non simplement connexe, car la condition $d\varphi = 0$ sur le contour, entraîne

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \text{ sur le contour extérieur } \Omega_0 \\ \varphi &= \varphi_i \text{ sur les contours intérieurs } \Omega_i \neq \varphi_0 \end{aligned}$$

Par exemple, sur la couronne comprise entre R_1 et R_0 , la fonction $\varphi = \frac{A}{4} [r^2 - (R_0^2 + R_1^2)]$ n'est pas constante, mais répond bien aux conditions ci-dessus. ■

Quoi qu'il en soit, même si ces contraintes tangentielles existent, elles ne dépendent pas du chargement et ne peuvent être déterminées par l'élasticité.

Finalement, les composantes du tenseur des contraintes dans la base principale de la section droite, soumise à un effort normal N sont :

$$\boxed{[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \sigma_{11} = \frac{N(x_1)}{S(x_1)}}$$

Dans une section droite d'abscisse x_1 , le tenseur des contraintes dû à N est uniforme, et les contraintes dans la section droite pour la direction \mathbf{X}_1 se réduisent à des contraintes normales.

La représentation de Mohr de ce tenseur est donnée figure 5.1

Le lecteur vérifiera facilement que les plus grandes contraintes tangentielles valent $\|\frac{\sigma_{11}}{2}\|$ et qu'elles sont obtenues pour des facettes dont la normale fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec \mathbf{X}_1 .

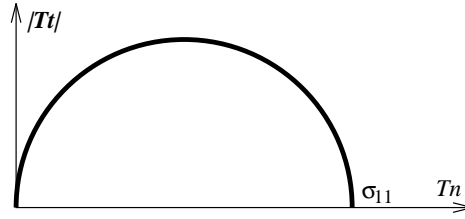


FIG. 5.1 – Représentation de Mohr des contraintes dues à l'effort normal

5.1.2 Déformation et déplacements de la ligne moyenne

Les lois de comportement des poutres donnent pour les rotations :

$$\boxed{\frac{d\omega_1}{dx_1} = \frac{d\omega_2}{dx_1} = \frac{d\omega_3}{dx_1} = 0}$$

L'effort normal ne provoque donc aucune évolution de la rotation le long de la ligne moyenne.

Pour les déplacements, on a :

$$\boxed{\frac{du_1}{dx_1} = \frac{N(x_1)}{ES} ; \frac{d^2u_2}{dx_1^2} = \frac{d^2u_3}{dx_1^2} = 0} \quad (5.1)$$

L'effort normal provoque donc un allongement de la ligne moyenne, mais aucune variation de la courbure.

Calcul des rotations et des déplacements pour les poutres droites

Pour les poutres droites dont les axes principaux ne varient pas le long de la ligne moyenne, la base locale $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ est fixe. Il suffit donc d'intégrer les équations différentielles 5.1.

Calcul des rotations et des déplacements pour les poutres courbes

Pour les poutres courbes ou pour les poutres droites dont la base locale $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ varie le long de la ligne moyenne, on préfère donner les résultats sous forme intégrée, avec les formules de Bresse².

Si *toutes les sections* de la poutre ne travaillent qu'à l'effort normal, il ne reste que :

$$\begin{aligned} \omega_B &= \omega_A \\ \mathbf{u}_B &= \mathbf{u}_A + \omega_A \wedge \mathbf{AB} + \int_A^B \frac{N(l)}{ES(l)} \mathbf{t} \, dl \end{aligned}$$

5.1.3 Déformations dans la section droite

En utilisant la loi de comportement de l'élasticité, il vient :

$$\frac{d\xi_1}{dx_1} = \frac{N}{ES} = \epsilon_{11} ; \frac{d\xi_2}{dx_2} = \frac{-\nu N}{ES} = \epsilon_{22} ; \frac{d\xi_3}{dx_3} = \frac{-\nu N}{ES} = \epsilon_{33}$$

². ces formules étant générales, on peut aussi les utiliser pour les poutres droites.

On constate que toutes les particules de la section droite d'abscisse x_1 subissent le même allongement ϵ_{11} dans la direction \mathbf{X}_1 (ϵ_{11} est indépendant de x_2 et x_3). Pendant la déformation, les sections droites restent donc planes et perpendiculaires à la ligne moyenne³.

Les termes ϵ_{22} et ϵ_{33} montrent que la section se déforme dans son plan suivant une homothétie de centre G .

5.2 Applications

5.2.1 Structures réticulées (ou treillis)

On appelle structure réticulée (ou treillis) un assemblage de *poutres droites*, de section constante, reliées entre elles par des rotules. Les liaisons avec l'extérieur doivent aussi être des rotules.

Les points où se trouvent les rotules sont appelés *nœuds*.

Les interactions entre les éléments de la structure et les actions extérieures à la structure ne sont donc réduites à des forces (pas de moments). De plus, dans un treillis, on doit négliger les poids propres.

Il est facile de voir en écrivant l'équilibre de l'une quelconque des poutres, que sous ces hypothèses, chaque poutre isolée a pour chargement extérieur uniquement une force à chaque extrémité. Ces deux forces sont donc opposées et colinéaires à la ligne moyenne. Le torseur des efforts intérieurs de chaque poutre se réduit à un effort normal⁴. Par exemple, pour une poutre AB du treillis, orientée de A vers B , on a :

$$\mathbf{F}_B = F_B \mathbf{X}_{1AB} = -F_A \mathbf{X}_{1AB} \quad N = \mathbf{F}_B \cdot \mathbf{X}_{1AB} = F_B$$

La seule inconnue pour une poutre de treillis est donc N .

Pour résoudre un treillis, il suffit donc d'écrire deux ensembles d'équations :

- Les équations d'équilibre de chaque nœud. Les forces extérieures à chaque nœud sont les actions des barres qui aboutissent au nœud, les charges de la structure sur le nœud et les actions de liaison sur le nœud.⁵
- Les équations d'allongement de chaque barre : par exemple, pour une barre AB , si on note \mathbf{u}_A et \mathbf{u}_B les vecteurs déplacement de A et B et \mathbf{X}_{1AB} le vecteur unitaire de la ligne moyenne, on a la relation

$$(\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A) \cdot \mathbf{X}_{1AB} = \frac{NL_{AB}}{E_{AB}S_{AB}}$$

Remarque :

Si les seules équations d'équilibre des nœuds suffisent pour déterminer les efforts normaux dans les barres, on dit que le treillis est *isostatique*. Sinon le treillis est *hyperstatique* et il faut résoudre l'ensemble des équations simultanément.

3. Ce résultat est souvent présenté comme une hypothèse dans les traités élémentaires de théorie des poutres, sous le nom d'*hypothèse de Navier-Bernoulli*.

4. Dans ce cas, beaucoup d'auteurs disent que la poutre est une *barre*.

5. Les torseurs d'action de liaison se réduisent à des forces puisque les liaisons sont des rotules.

5.2.2 Fils (ou câbles)

On appelle fil (ou câble), une poutre qui n'a aucune résistance à la flexion et à la torsion. Le torseur des efforts intérieurs a donc un moment nul. Le chargement d'une telle poutre ne peut être que des forces concentrées ou des densités linéiques de forces.

La seconde équation d'équilibre local des poutres se réduit donc à

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

ce qui montre que la résultante du torseur des efforts intérieurs \mathbf{R} est colinéaire à \mathbf{t} . Les câbles ne travaillent donc qu'à l'effort normal. On a donc :

$$\mathbf{R} = N\mathbf{t}$$

La résolution des problèmes de câbles est un peu particulière : contrairement à l'habitude en élasticité linéaire, on n'écrit pas les équations d'équilibre sur la configuration initiale, mais sur la configuration déformée⁶.

La première équation d'équilibre local des poutres devient :

$$\frac{d(N(l)\mathbf{t})}{dl} + \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

C'est une équation différentielle vectorielle dont la résolution donne à la fois la loi $N(l)$ et la forme du câble sous la charge⁷.

Le lecteur pourra vérifier à titre d'exercice, que la forme d'un câble soumis à son poids propre est une chaînette.

⁶. Un câble non chargé n'a pas de configuration initiale!

⁷. Par exemple sous la forme d'une loi $\mathbf{t}(l)$.

Chapitre 6

Etude du moment de flexion

On se propose ici d'étudier les contraintes et les déformations dans une section droite de poutre uniquement soumise à un moment de flexion.

6.1 Résultats de Saint-Venant

On reprend les résultats de Saint-Venant en posant $N = 0$, $\mathbf{T} = 0$ et $M_t = 0$.

6.1.1 Champ du tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes dû à \mathbf{M}_f est :

$$\sigma_{11} = \frac{M_{f2}(x_1)}{I_2} x_3 - \frac{M_{f3}(x_1)}{I_3} x_2 ; \sigma_{12} = \partial_3 \varphi ; \sigma_{13} = -\partial_2 \varphi$$

où φ est une fonction de x_2 et de x_3 , solution de

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= A \\ d\varphi &= 0 \text{ sur le contour } \Omega \\ 0 &= 2 \int_S \varphi ds + \int_{\Omega} \varphi (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que dans le cas de l'effort normal, on pose

$$\sigma_{12} = 0 ; \sigma_{13} = 0$$

Finalement, les composantes du tenseur des contraintes dans la base principale de la section droite, soumise à un moment de flexion \mathbf{M}_f sont :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \sigma_{11} = \frac{M_{f2}(x_1)}{I_2} x_3 - \frac{M_{f3}(x_1)}{I_3} x_2$$

Dans une section droite d'abscisse x_1 , le tenseur des contraintes dû à \mathbf{M}_f est une fonction linéaire en x_2 et x_3 , et les contraintes dans la section droite pour la direction \mathbf{X}_1 se réduisent à des contraintes normales.

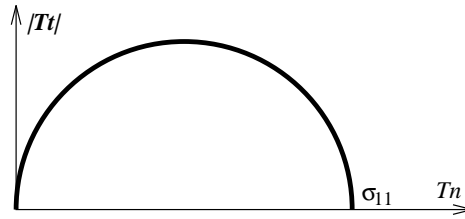


FIG. 6.1 – Représentation de Mohr des contraintes dues au moment de flexion

La représentation de Mohr de ce tenseur en un point M où $\sigma_{11} > 0$ est donnée figure 6.1

Les plus grandes contraintes tangentielles valent $\|\frac{\sigma_{11}}{2}\|$ et sont obtenues pour des facettes dont la normale fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec \mathbf{X}_1 .

Axe neutre

La répartition linéaire des σ_{11} dans la section droite montre qu'il existe une droite dans le plan de la section droite sur laquelle les σ_{11} sont nuls. On l'appelle *axe neutre* et son équation dans ce plan est

$$\frac{M_{f2}}{I_2}x_3 - \frac{M_{f3}}{I_3}x_2 = 0$$

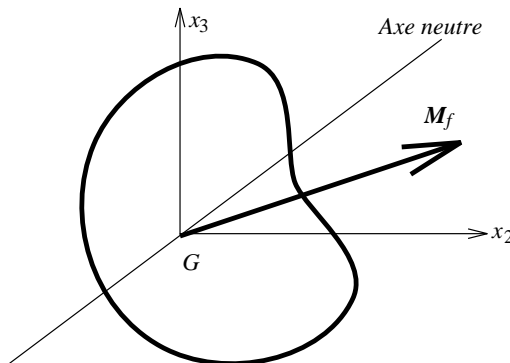


FIG. 6.2 – Axe neutre en flexion pure, dans une section droite

Elle passe évidemment par G , l'origine des axes¹.

6.1.2 Déformation et déplacements de la ligne moyenne

Les lois de comportement des poutres donnent pour les rotations:

$$\boxed{\frac{d\omega_1}{dx_1} = 0 ; \frac{d\omega_2}{dx_1} = \frac{M_{f2}(x_1)}{EI_2} ; \frac{d\omega_3}{dx_1} = \frac{M_{f3}(x_1)}{EI_3}}$$

1. On voit dans la sous-section suivante que l'axe neutre est la droite autour de laquelle les sections tournent pendant la déformation. On peut remarquer cet axe de rotation n'est pas en général colinéaire au moment de flexion M_f . On pourra vérifier facilement que cette colinéarité ne se produit que dans trois cas :

- si $I_2 = I_3$ (le tenseur d'inertie de la section droite est sphérique)
- si $M_{f2} = 0$ ou $M_{f3} = 0$ (moment de flexion colinéaire à l'un des axes principaux d'inertie de la section droite)

qu'on peut encore écrire vectoriellement:

$$\frac{d\omega_{23}}{dx_1} = \frac{M_{f2}(x_1)}{EI_2} \mathbf{X}_2 + \frac{M_{f3}(x_1)}{EI_3} \mathbf{X}_3$$

Le moment de flexion provoque donc une rotation autour de l'axe neutre.

Pour les déplacements, on obtient :

$$\frac{du_1}{dx_1} = 0 ; \frac{d^2u_2}{dx_1^2} = \frac{M_{f3}}{EI_3} ; \frac{d^2u_3}{dx_1^2} = -\frac{M_{f2}}{EI_2}$$

Le moment de flexion ne provoque donc pas d'allongement de la ligne moyenne. Par contre, il provoque des variations de courbure dans les plans $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ et $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3)^2$.

Calcul des rotations et des déplacements pour les poutres droites

Pour les poutres droites dont les axes principaux ne varient pas le long de la ligne moyenne, la base locale $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ est fixe. Il suffit donc d'intégrer les équations différentielles ci-dessus³.

Calcul des rotations et des déplacements pour les poutres courbes

Pour les poutres courbes ou pour les poutres droites dont la base locale $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ varie le long de la ligne moyenne, on préfère donner les résultats sous forme intégrée avec les formules de Bresse.

Si toutes les sections de la poutre ne travaillent qu'à l'effort normal et au moment de flexion, on obtient:

$$\begin{aligned} \omega_B &= \omega_A + \int_A^B \left(\frac{M_{f2}}{EI_2} \mathbf{X}_2 + \frac{M_{f3}}{EI_3} \mathbf{X}_3 \right) dl \\ \mathbf{u}_B &= \mathbf{u}_A + \omega_A \wedge \mathbf{AB} + \int_A^B \frac{N(l)}{ES(l)} \mathbf{t} dl + \int_A^B \left(\frac{M_{f2}}{EI_2} \mathbf{X}_2 + \frac{M_{f3}}{EI_3} \mathbf{X}_3 \right) \wedge \mathbf{GB} dl \end{aligned}$$

6.1.3 Déformations dans la section droite

On déduit des résultats du problème de Saint-Venant dans le cas d'une flexion pure que le champ du tenseur de déformations est :

$$[\epsilon_{\bullet\bullet}] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\sigma_{11} \end{bmatrix} \quad \text{où } \sigma_{11} = \frac{M_{f2}(x_1)}{I_2} x_3 - \frac{M_{f3}(x_1)}{I_3} x_2$$

2. En petites déformations, $\frac{d^2u_2}{dx_1^2}$ est bien une variation de courbure de la poutre droite dans le plan $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$.

Avant déformation, la courbure est nulle. Après déformation, la courbure dans le plan $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ est $\frac{\frac{d^2u_2}{dx_1^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{du_2}{dx_1}\right)^2}}$.

Or en petites déformations, $\sqrt{1 + \left(\frac{du_2}{dx_1}\right)^2} \simeq 1$. Même raisonnement dans le plan $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3)$

3. L'évolution de M_{f2} et M_{f3} le long de la ligne moyenne est souvent un polynôme en x_1 . Pour éviter de refaire toujours les mêmes calculs, on trouve dans la littérature des formulaires pratiques donnant les efforts intérieurs et les déplacements dans les poutres droites sous divers cas de charge et de liaison avec l'extérieur. En utilisant le théorème de superposition, on parvient à résoudre rapidement des problèmes complexes en superposant les solutions simples du formulaire.

Puisque $\frac{d\omega_{23}}{dx_1} = \frac{M_{f2}(x_1)}{EI_2} \mathbf{X}_2 + \frac{M_{f3}(x_1)}{EI_3} \mathbf{X}_3$, ϵ_{11} peut encore s'écrire :

$$\epsilon_{11} = \left(\frac{d\omega_{23}}{dx_1} \wedge \mathbf{GM} \right) \cdot \mathbf{X}_1$$

où M est un point quelconque de la section droite.

On voit clairement que les allongements longitudinaux sont le résultat d'une rotation du plan la section droite, égale à celle du point G . Pendant la déformation, les sections droites restent donc planes et perpendiculaires à la ligne moyenne⁴.

6.2 Applications

Les calculs de poutres en flexion sont très importants dans la pratique. Presque tous les éléments de construction modélisables par des poutres ont un moment de flexion dans leur torseur des efforts intérieurs.

Toutefois, il est rare que le moment de flexion soit seul. Il est presque toujours associé avec un effort tranchant. Aux contraintes dues au moment de flexion devront s'ajouter celles dues à l'effort tranchant. Cependant, en ce qui concerne les déplacements de la ligne moyenne, on verra que l'effort tranchant ne joue aucun rôle. Bien que les contraintes soient incomplètes, les déplacements u_2 et u_3 de la ligne moyenne calculés ici sont donc corrects.

4. Ce résultat est souvent présenté comme une hypothèse dans les traités élémentaires de théorie des poutres, sous le nom d'*hypothèse de Navier-Bernoulli*.

Chapitre 7

Etude du moment de torsion

On se propose ici d'étudier les contraintes et les déformations dans une section droite de poutre uniquement soumise à un moment de torsion.

7.1 Résultats de Saint-Venant

On reprend les résultats de Saint-Venant en posant $N = 0$, $T = 0$ et $M_f = 0$.

7.1.1 Champ du tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes dû à M_t est :

$$\sigma_{11} = 0 ; \sigma_{12} = \partial_3 \varphi ; \sigma_{13} = -\partial_2 \varphi$$

où φ est une fonction de x_2 et de x_3 , solution du problème suivant :

$$\Delta \varphi = A$$

$$d\varphi = 0 \text{ sur le contour } \Omega$$

$$M_t = 2 \int_S \varphi ds + \int_{\Omega} \varphi (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) \text{ (équation qui détermine } A \text{ en fonction de } M_t)$$

Les composantes du tenseur des contraintes dans la base principale d'inertie de la section droite, dû à un moment de torsion M_t sont :

$$[\sigma]_{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_3 \varphi & -\partial_2 \varphi \\ \partial_3 \varphi & 0 & 0 \\ -\partial_2 \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans une section droite d'abscisse x_1 , les contraintes dans la section droite pour la direction \mathbf{X}_1 se réduisent à des contraintes tangentielles.

On pose

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\sigma} \bar{\otimes} \mathbf{X}_1 = \sigma_{12} \mathbf{X}_2 + \sigma_{13} \mathbf{X}_3 = \partial_3 \varphi \mathbf{X}_2 - \partial_2 \varphi \mathbf{X}_3 \\ \|\boldsymbol{\tau}\| &= \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} = \|\text{grad } \varphi\| \end{aligned}$$

La détermination des contraintes dues à un moment de torsion est donc ramenée à la résolution du problème en φ .

Il est facile de vérifier que les vecteurs propres unitaires de σ sont :

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\mathbf{X}_1 + \frac{\boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \right) ; \mathbf{v}_2 = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \wedge \mathbf{X}_1 ; \mathbf{v}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\mathbf{X}_1 - \frac{\boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \right)$$

et que dans une base principale orthonormée du tenseur des contraintes, les composantes du tenseur des contraintes sont

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\tau}\| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\|\boldsymbol{\tau}\| \end{bmatrix}$$

La représentation de Mohr de ce tenseur est donnée figure 7.1 :

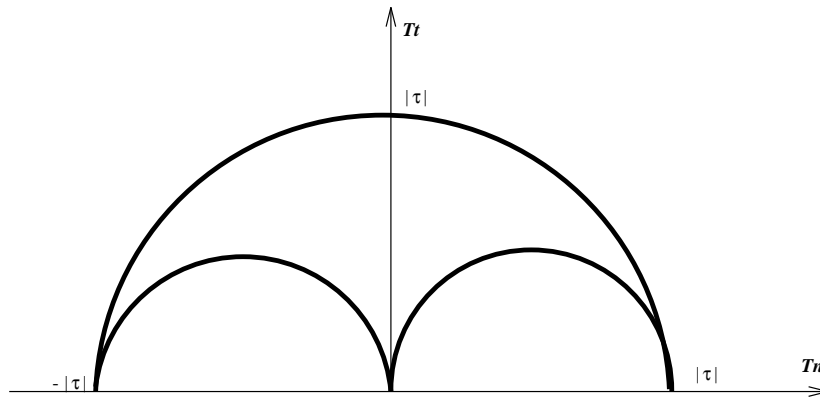


FIG. 7.1 – Représentation de Mohr des contraintes dues au moment de torsion

7.1.2 Déformation et déplacements de la ligne moyenne

Les lois de comportement des poutres donnent :

– pour les rotations :

$$\frac{d\omega_1}{dx_1} = -\frac{A(1+\nu)}{E} ; \frac{d\omega_2}{dx_1} = \frac{d\omega_3}{dx_1} = 0$$

Le moment de torsion provoque une évolution de la rotation autour de l'axe \mathbf{X}_1 des points de la ligne moyenne.

En théorie des poutres, on a l'habitude de poser

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (= \mu \text{ le coefficient de Lamé})$$

G est appelé *module d'élasticité transversal* ou encore *module de cisaillement*. On écrit donc :

$$\frac{d\omega_1}{dx_1} = -\frac{A}{2G}$$

$\frac{d\omega_1}{dx_1}$ est appelé *l'angle de torsion unitaire* (en radians/m).

– pour les déplacements :

$$\boxed{\frac{du_1}{dx_1} = 0 ; \frac{d^2u_2}{dx_1^2} = \frac{d^2u_3}{dx_1^2} = 0}$$

Le moment de torsion ne provoque ni allongement ni variation de courbure de la ligne moyenne. Il ne provoque que des rotations des points de la ligne moyenne autour de \mathbf{X}_1 (mouvement de torsion).

7.2 Fonction des contraintes de torsion

Tel qu'elle est définie précédemment, la fonction $\varphi(x_2, x_3)$ dépend à la fois de la forme de la section droite et de la valeur du moment de torsion M_t .

Soit $\psi(x_2, x_3)$ la fonction définie par :

$$\psi = -\frac{2\varphi}{A} \Leftrightarrow \varphi = -\frac{A\psi}{2}$$

$\psi(x_2, x_3)$ est appelée *fonction des contraintes de torsion*.

Le problème en φ , devient le problème en ψ suivant :

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\psi &= -2 \\ d\psi &= 0 \text{ sur le contour } \Omega \end{aligned}} \quad (7.1)$$

La fonction ψ ne dépend que de la forme de la section droite.

La constante A est alors déterminée par

$$M_t = -\frac{A}{2} \left(2 \int_S \psi \, ds + \int_{\Omega} \psi (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) \right)$$

La loi de comportement des poutres en torsion s'écrit donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dx_1} &= \frac{M_t}{GJ} \\ \text{avec } J &= 2 \int_S \psi \, ds + \int_{\Omega} \psi (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) \end{aligned}} \quad (7.2)$$

où J ne dépend que de la forme de la section droite. J est appelé *module de rigidité à la torsion*¹ de la section \mathcal{S} . Sa dimension est L^4 , l'unité SI est le m^4 .

Connaissant la forme d'une section droite, on connaît donc ψ et J . Le tenseur des contraintes est alors connu :

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{11} &= 0 \\ \sigma_{12} &= \frac{M_t}{J} \partial_3 \psi \\ \sigma_{13} &= -\frac{M_t}{J} \partial_2 \psi \end{aligned}} \quad (7.3)$$

soit encore vectoriellement :

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \frac{M_t}{J} (\mathbf{grad}\psi \wedge \mathbf{X}_1)} \quad (7.4)$$

1. par analogie avec la flexion, certains auteurs le nomment *inertie de torsion*. Cette dénomination est impropre car J n'est pas un moment d'inertie (sauf, comme on le verra plus loin, pour les sections circulaires où J est le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe \mathbf{X}_1).

7.3 Résolution de la torsion dans les poutres

La démarche pour calculer les contraintes dans une section droite dues à un moment de torsion est donc la suivante :

- résolution du problème 7.1 en ψ sur la section droite
- calcul de J avec 7.2
- calcul du champ des contraintes dans la section avec 7.3

Les rotations et déplacements de la ligne moyenne sont obtenus :

- pour les poutres droites de base locale constante, par simple intégration des lois de comportement
- pour les autres poutres, par utilisation des formules de Bresse² :

$$\begin{aligned} \omega_B &= \omega_A + \int_A^B \left(\frac{M_t}{GJ} \mathbf{X}_1 + \frac{M_{f2}}{EI_2} \mathbf{X}_2 + \frac{M_{f3}}{EI_3} \mathbf{X}_3 \right) dl \\ \mathbf{u}_B &= \mathbf{u}_A + \omega_A \wedge \mathbf{AB} + \int_A^B \frac{N(l)}{ES(l)} \mathbf{t} dl + \int_A^B \left(\frac{M_t}{GJ} \mathbf{X}_1 + \frac{M_{f2}}{EI_2} \mathbf{X}_2 + \frac{M_{f3}}{EI_3} \mathbf{X}_3 \right) \wedge \mathbf{GB} dl \end{aligned}$$

7.3.1 Techniques de résolution de ψ

Soit une section droite \mathcal{S} de contour Ω il faut trouver ψ tel que

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -2 \\ d\psi &= 0 \text{ sur le contour } \Omega \end{aligned}$$

Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre ce problème.

Recherche analytique

Pour les sections simplement connexes (un seul contour), on peut poser $\psi = \psi_0 = 0^3$ sur le contour Ω (voir 7.1). On peut tenter de chercher une fonction ψ de la forme

$$\psi = f(x_2, x_3) g(x_2, x_3)$$

ψ respecte automatiquement la condition sur le contour si $f(x_2, x_3) = 0$ est l'équation du contour. On peut donc chercher $g(x_2, x_3)$ pour que $\Delta\psi = -2$.

Analogie électrique

On sait qu'en électricité, le potentiel \mathcal{V} est régi par la loi $\Delta\mathcal{V} = 0$. Au lieu de chercher ψ on cherche $\tilde{\psi}$ défini par

$$\tilde{\psi} = \psi + \frac{1}{2} (x_2^2 + x_3^2)$$

On a alors $\Delta\tilde{\psi} = 0$ et la condition sur le contour Ω est

$$\tilde{\psi}_0(x_2, x_3) = \psi_0 + \frac{1}{2} (x_2^2 + x_3^2)$$

2. On a ajouté les effets de l'effort normal et de la flexion pour avoir une formule complète. On verra en effet plus loin que l'effort tranchant n'apporte rien dans les déplacements de la ligne moyenne.

3. On rappelle que ψ est défini à une constante additive près, car les contraintes sont fonction des dérivés de ψ .

On réalise donc un montage sur un support conducteur⁴ de la même forme que la section droite, et on impose sur son contour des potentiels \mathcal{V}_0 tels que

$$\mathcal{V}_0(x_2, x_3) = K \left[\psi_0 + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2) \right]$$

où K est une constante choisie pour avoir des potentiels raisonnables.

Il suffit de relever avec une sonde en autant de points qu'on veut les valeurs du potentiel $\mathcal{V} = K\tilde{\psi}$ à l'intérieur de la section, pour connaître la fonction $\tilde{\psi}$ et donc la fonction ψ . On construit ensuite le champ $\mathbf{grad}\psi$ pour en déduire $\boldsymbol{\tau}$ avec 7.4.

Analogie de la membrane

Une membrane est un milieu élastique ne résistant pas à la flexion. On montre en théorie des milieux surfaciques, que si une membrane plate est tendue de manière isotrope avec une tension initiale T (en N/m), et si elle est soumise sur l'une de ses faces à une pression uniforme p , alors son déplacement w perpendiculaire à son plan est régi par la loi :

$$\Delta w = -\frac{p}{T}$$

On fait donc l'analogie $w \leftrightarrow \psi$. Pratiquement, on perce dans une plaque rigide un trou de la forme de la section droite, puis on rebouche avec une membrane tendue de manière isotrope⁵. La plaque étant considérée comme rigide, la condition $w = 0$ sur le bord est bien respectée. On applique une pression p sur une des faces. En relevant la forme de la membrane déformée, on connaît w et donc ψ . On construit ensuite le champ $\mathbf{grad}\psi$ pour en déduire $\boldsymbol{\tau}$ avec 7.4.

Méthodes de résolution numérique

Le progrès des calculateurs et des logiciels fait préférer aujourd'hui les méthodes numériques. Le problème en ψ se résout numériquement en calculant les valeurs (approchées!) de ψ sur un réseau de points choisis dans la section droite. Deux types de méthodes peuvent être employées :

- la méthode des différences finies (le réseau de points doit être topologiquement équivalent à un pavage carré)
- la méthode des éléments finis (le réseau de points peut être quelconque).

7.3.2 Calcul de J

On suppose ici que $\psi(x_2, x_3)$ est connue analytiquement⁶. On rappelle que J est défini par

$$J = 2 \int_S \psi \, ds + \int_{\Omega} \psi (x_3 dx_2 - x_2 dx_3)$$

4. On utilise soit du papier conducteur (papier rhéoelectrique), soit de l'eau dans une cuve de forme adéquate.

5. On utilise soit une plaque de caoutchouc ou de résine très mince (la tension isotrope est difficile à réaliser), soit une bulle de savon (la tension isotrope est automatiquement donnée par la tension superficielle, mais le relevé de la forme doit être fait par des moyens optiques).

6. Si ψ n'est connu que par points, on calcule J par intégration numérique.

Si la section droite est simplement connexe

Il n'y a qu'un seul contour et la condition $d\psi = 0$ conduit à $\psi = \psi_0$ sur le contour.

$$J = 2 \int_S \psi \, ds + \psi_0 \int_{\Omega} (x_3 dx_2 - x_2 dx_3)$$

Or

$$\int_{\Omega} (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) = -2S$$

où S est l'aire entourée par le contour Ω .

On a donc

$$J = 2 \int_S \psi \, ds - 2\psi_0 S$$

Si la section droite n'est pas simplement connexe

Le contour Ω est constitué de plusieurs contours : un contour extérieur Ω_0 et $n - 1$ contours intérieurs Ω_i . La condition $d\psi = 0$ conduit aux n conditions suivantes :

$$\psi = \psi_0 \text{ sur } \Omega_0 \ ; \ \psi = \psi_i \text{ sur } \Omega_i$$

On a donc

$$J = 2 \int_S \psi \, ds + \psi_0 \int_{\Omega_0} (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) - \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i \int_{\Omega_i} (x_3 dx_2 - x_2 dx_3)$$

soit encore

$$J = 2 \int_S \psi \, ds - 2\psi_0 S_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i S_i$$

où S_i est l'aire entourée par le contour Ω_i ($i = 0 \dots n - 1$).

7.4 Gauchissement des sections droites

Si on reprend le champ des déplacements ξ du problème de Saint-Venant dans le cas d'un section soumise à un moment de torsion seul, on obtient :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1 + \nu}{E} Z(x_2, x_3) + \frac{\gamma x_2 - \beta x_3 + \alpha_0}{E} = \frac{Z(x_2, x_3)}{2G} + \frac{\gamma x_2 - \beta x_3 + \alpha_0}{E} \\ \xi_2 &= A \frac{1 + \nu}{E} x_1 x_3 - \frac{\gamma x_1 + \alpha x_3 + \beta_0}{E} = \frac{A}{2G} x_1 x_3 - \frac{\gamma x_1 + \alpha x_3 + \beta_0}{E} \\ \xi_3 &= -A \frac{1 + \nu}{E} x_1 x_3 + \frac{\beta x_1 - \alpha x_2 + \gamma_0}{E} = -\frac{A}{2G} x_1 x_3 + \frac{\beta x_1 - \alpha x_2 + \gamma_0}{E} \end{aligned}$$

où

$$A = -2 \frac{M_t}{J}$$

et $Z(x_2, x_3)$ est défini par

$$\mathbf{grad}Z = (2 \mathbf{grad}\varphi - A \mathbf{GM}) \wedge \mathbf{X}_1 = \frac{2M_t}{J} (\mathbf{grad}\psi + \mathbf{GM}) \wedge \mathbf{X}_1$$

La valeur de ξ_1 (déplacements perpendiculaires à la section droite) dépend de la fonction $Z(x_2, x_3)$ *a priori* non linéaire.

En général⁷, dans une poutre soumise à un moment de torsion, les sections droites ne restent pas planes après déformation. La fonction Z est appelée *fonction de gauchissement*.

Si on veut étudier le gauchissement de la section d'abscisse x_1 , on peut «fixer» un point de la section droite et regarder les déplacements ξ_1 des autres points de la section par rapport au point fixé.

Par exemple, dans une section d'abscisse x_1 , si on veut regarder le gauchissement par rapport au centre de gravité de la section, on dit que le point $(x_1, 0, 0)$ ne bouge pas ($\xi(x_1, 0, 0) = 0$) et ne tourne pas ($\Omega(x_1, 0, 0) = 0$), ce qui entraîne

$$Z(0, 0) = 0; \alpha = \beta = \gamma = 0; \alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$$

Le gauchissement des points de la section x_1 par rapport centre de gravité est donc

$$\xi_1 = \frac{Z(x_2, x_3)}{2G}$$

7.5 Application aux sections droites circulaires

Soit une poutre dont la section droite est un disque de rayon R . Il est facile de vérifier que la fonction

$$\psi = \frac{1}{2} (R^2 - x_2^2 - x_3^2) = \frac{1}{2} (R^2 - r^2)$$

a un laplacien égal à -2 et est nulle sur le contour $r = R$.

Le module de rigidité à la torsion J est donc⁸ :

$$J = 2 \int_S \psi ds = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

Si on repère un point M de la section droite par ses coordonnées polaires (r, θ) et si on note $(\tilde{\mathbf{e}}_r, \tilde{\mathbf{e}}_\theta)$ la base naturelle normée associée aux coordonnées polaires, les contraintes tangentielles dans la section droite sont données par :

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{M_t}{J} (\mathbf{grad}\psi \wedge \mathbf{X}_1) = \frac{M_t}{J} (-r \tilde{\mathbf{e}}_r \wedge \mathbf{X}_1)$$

soit encore

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{32 M_t}{\pi D^4} r \tilde{\mathbf{e}}_\theta$$

7. on verra dans la section suivante que les sections circulaires ou tubulaires sont un cas particulier où le gauchissement est nul

8. Il se trouve que pour les sections droites circulaires, J est le moment d'inertie du disque par rapport à son axe \mathbf{X}_1 , $J = \int_S r^2 ds$, ce qui justifie la dénomination d'*inertie de torsion* employée par certains auteurs. Cette dénomination est incorrecte car pour les sections autres que circulaires ou annulaires, J n'est pas un moment d'inertie.

Dans une section droite circulaire, les contraintes tangentielles dues au moment de torsion sont portées par \tilde{e}_θ et proportionnelles à r . Elles sont maximales sur le contour $r = R$:

$$\|\tau\|_{max} = \frac{16 \|M_t\|}{\pi D^3}$$

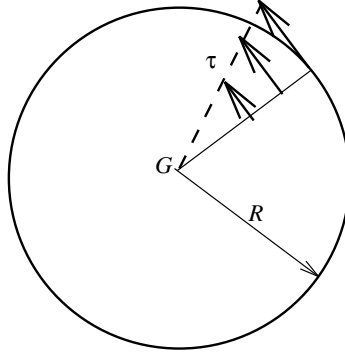


FIG. 7.2 – Contraintes tangentielles dans une section droite circulaire

Le mouvement de torsion est régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d\omega_1}{dx_1} = \frac{M_t}{GJ} = \frac{32 M_t}{\pi G D^4}$$

Enfin, la fonction de gauchissement est nulle car

$$\left\{ \mathbf{grad}Z = \frac{2M_t}{J} (\mathbf{grad}\psi + \mathbf{GM}) \wedge \mathbf{X}_1 = \frac{2M_t}{J} (-r\tilde{e}_r + r\tilde{e}_r) \wedge \mathbf{X}_1 = \mathbf{0} ; Z(0,0) = 0 \right\} \Rightarrow Z = 0$$

Dans une poutre de section circulaire soumise à un moment de torsion seul, les sections droites ne gauchissent pas.

7.6 Application aux sections droites annulaires

Soit une poutre dont la section droite est la couronne comprise entre les rayons R_1 et R_0 avec $R_1 < R_0$.

On vérifie facilement que la fonction $\psi = -\frac{r^2}{2}$ a bien un laplacien égal à -2 et qu'elle est constante sur les contours

$$\psi_0 = \psi_{(r=R_0)} = -\frac{R_0^2}{2} \text{ et } \psi_1 = \psi_{(r=R_1)} = -\frac{R_1^2}{2}$$

Le module de torsion est alors :

$$J = 2 \int_S \left(-\frac{r^2}{2} \right) ds - 2\psi_0 S_0 + 2\psi_1 S_1$$

soit encore

$$J = \frac{\pi}{32} (D_0^4 - D_1^4)$$

Le champ des contraintes tangentielles dans la section est

$$\tau = \frac{M_t}{J} r \tilde{e}_\theta = \frac{32 M_t}{\pi (D_0^4 - D_1^4)} r \tilde{e}_\theta$$

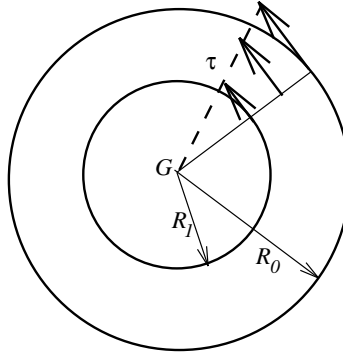


FIG. 7.3 – Contraintes tangentielles dans une section droite tubulaire

La contrainte tangentielle est maximum sur le contour extérieur :

$$\|\tau\|_{max} = \frac{16 \|M_t\| D_0}{\pi (D_0^4 - D_1^4)}$$

De même que pour les sections circulaires pleines, on trouve que les sections droites ne gauchissent pas.

7.7 Approximation pour les sections droites en profil mince

On dit que la section droite d'une poutre est en *profil mince* si elle peut être assimilée à une ligne avec une épaisseur⁹.

On repère un point N de la section droite par l'abscisse curviligne u de sa projection M sur la ligne de profil et par sa distance $MN = v$ à la ligne de profil, où $v \in \left[-\frac{\epsilon}{2}, +\frac{\epsilon}{2}\right]$ (voir figure 7.4).

L'épaisseur ϵ de la section droite peut éventuellement être variable¹⁰ en fonction de l'abscisse curviligne u de M , mais elle doit rester faible devant le rayon de courbure de la ligne de profil.

L'approximation fondamentale des sections droites en profil mince est de supposer que la fonction de torsion ψ est telle que¹¹

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} \ll \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

On suppose donc que ψ n'est fonction que de v . Son laplacien étant égal à -2 , ψ est donc de la forme

$$\psi = -v^2 + av + b$$

9. La plupart des profilés du commerce entrent dans le cadre de cette approximation: ce sont les profilés en L, en U, en T, en H, les tubes minces etc. Ce cas particulier a donc une grande importance pratique.

10. Dans les profilés courants, elle est le plus souvent constante ou constante par morceaux.

11. Cette approximation est fortement suggérée par l'analogie de la membrane. On comprend bien que la forme de la membrane évolue peu suivant u . Il n'y a qu'au voisinage des points A et B que l'hypothèse est incorrecte.

On peut aussi la justifier de manière correcte en calculant l'expression du laplacien dans le système de coordonnées (u, v) et en négligeant les termes en $\frac{v}{R}$

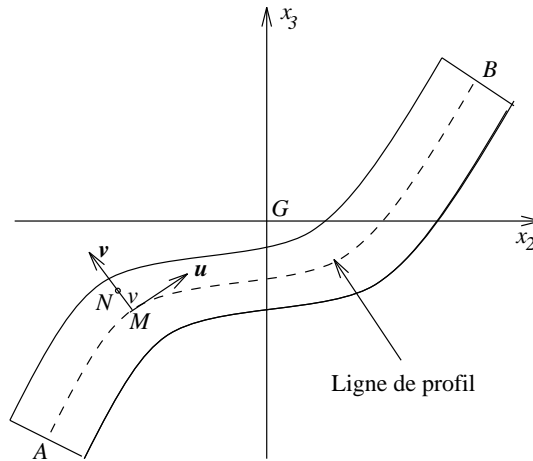


FIG. 7.4 – Section droite en profil mince

Comme toujours en torsion, il y a lieu de distinguer si la section droite est simplement connexe ou non.

7.7.1 Cas des sections droites simplement connexes

On dit dans ce cas que la section droite est un *profil mince ouvert*¹². La section droite n'a qu'un seul contour Ω et la condition de ψ sur Ω s'écrit :

$$\psi_0 = \psi\left(\frac{e}{2}\right) = \psi\left(-\frac{e}{2}\right) = 0$$

ce qui détermine les constantes a et b .

La fonction des contraintes ψ est donc :

$$\psi = -v^2 + \frac{e^2}{4}$$

Son gradient est :

$$\mathbf{grad}\psi = -2v\mathbf{v}$$

Le module de torsion J est alors :

$$J = 2 \int_S \psi ds = 2 \int_A^B \left[\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \left(-v^2 + \frac{e^2}{4}\right) dv \right] du$$

soit encore :

$$J = \int_A^B \frac{e^3}{3} du$$

Dans la pratique, e est souvent constant en fonction de u . On a alors $J = \frac{l e^3}{3}$ où l est la longueur de la ligne de profil.

12. Car la ligne de profil est une ligne ouverte.

Les contraintes tangentielles dans la section droite sont :

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{M_t}{J} (-2 v \mathbf{v} \wedge \mathbf{X}_1) = -2 \frac{M_t}{J} v \mathbf{u}$$

Elles sont proportionnelles à v et portées par \mathbf{u} (voir figure 7.5).

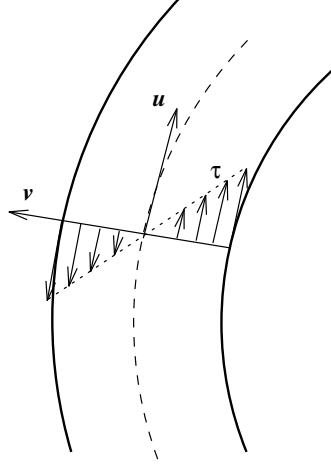


FIG. 7.5 – Contraintes tangentielles de torsion dans une section droite en profil mince ouvert

La contrainte tangentielle est maximum sur le contour de la section

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{max} = \frac{\|M_t\|}{J} e$$

Les sections en profil mince gauchissent fortement en général . Pour observer ce gauchissement, on examine le champ de déplacement dans la section droite, et plus particulièrement ξ_1 .

Les hypothèses sur la géométrie de la section droite mince permettent d'écrire¹³ :

$$\mathbf{grad}Z \simeq \frac{\partial Z}{\partial u} \mathbf{u} + \frac{\partial Z}{\partial v} \mathbf{v}$$

Or,

$$\mathbf{grad}Z = 2 \frac{M_t}{J} (\mathbf{grad}\psi + \mathbf{GN}) \wedge \mathbf{X}_1 = 2 \frac{M_t}{J} (-2 v \mathbf{v} + \mathbf{GM} + v \mathbf{v}) \wedge \mathbf{X}_1 \simeq 2 \frac{M_t}{J} \mathbf{GM} \wedge \mathbf{X}_1$$

car le vecteur $(v \mathbf{v})$ est négligeable devant \mathbf{GM} (profil mince).

On a donc, en projection sur \mathbf{u} et \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial u} &= 2 \frac{M_t}{J} (\mathbf{GM}, \mathbf{X}_1, \mathbf{u}) \\ \frac{\partial Z}{\partial v} &= 2 \frac{M_t}{J} (\mathbf{GM}, \mathbf{X}_1, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Le second membre de la seconde équation est une constante en v ,

$$Z = 2 v \frac{M_t}{J} (\mathbf{GM}, \mathbf{X}_1, \mathbf{v}) + f(u)$$

13. On peut le montrer en effectuant le changement de système de coordonnées (x_2, x_3) vers (u, v) , et en négligeant dans l'expression du gradient les quantités $\frac{e}{R}$ devant 1.

En reportant dans la première équation, il vient :

$$2v \frac{M_t}{J} (\mathbf{u}, \mathbf{X}_1, \mathbf{v}) + \frac{df}{du} = 2 \frac{M_t}{J} (\mathbf{GM}, \mathbf{X}_1, \mathbf{u})$$

soit encore :

$$\frac{df}{du} = 2 \frac{M_t}{J} (\mathbf{GM}, \mathbf{X}_1, \mathbf{u}) + 2v \frac{M_t}{J} \simeq 2 \frac{M_t}{J} (\mathbf{GM}, \mathbf{X}_1, \mathbf{u})$$

On a donc

$$Z = 2v \frac{M_t}{J} (\mathbf{GM}, \mathbf{X}_1, \mathbf{v}) + 2 \frac{M_t}{J} \int (\mathbf{GM}, \mathbf{X}_1, \mathbf{u}) du$$

En négligeant le terme en v et en choisissant deux points P et Q sur la ligne de profil, le gauchissement entre P et Q est :

$$\xi_1(Q) - \xi_1(P) = \frac{M_t}{GJ} \int_P^Q (\mathbf{GM}, \mathbf{X}_1, \mathbf{u}) du$$

Remarque 1 :

Sous l'approximation des profils minces, la fonction de gauchissement Z n'est fonction que de l'abscisse curviligne u . Cela signifie que le gauchissement est sensiblement constant dans l'épaisseur du profil.

Remarque 2 :

Le lecteur pourra vérifier que l'intégrale $\int_P^Q (\mathbf{GM}, \mathbf{X}_1, \mathbf{u}) du$ est égale à moins deux fois l'aire balayée par le rayon vecteur \mathbf{GM} lorsque le point M va de P à Q ¹⁴. Cette remarque permet, lorsque la ligne de profil est simple¹⁵, de calculer facilement cette intégrale par de simples considérations géométriques.

7.7.2 Cas des sections droites non simplement connexes

On dit dans ce cas que la section droite est un *profil mince fermé* ou *cloisonné*¹⁶. La section droite comporte alors plusieurs contours : un contour extérieur Ω_0 et des contours intérieurs Ω_i . La condition sur le contour $d\psi = 0$ se traduit par les conditions

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 \text{ sur le contour extérieur } \Omega_0 \\ \psi &= \psi_i \text{ sur les contours intérieurs } \Omega_i \end{aligned}$$

La ligne de profil est donc un ensemble d'arcs se rejoignant sur des *nœuds* (voir figure 7.6). On appelle *branche* un arc compris entre deux nœuds. Chaque branche est orientée arbitrairement, ce qui définit en tout point d'une branche un repère local (\mathbf{u}, \mathbf{v}) .

14. Cette aire est appelée *aire sectorielle* en G de l'arc PQ .

15. Si la ligne de profil est constituée de segments de droite, l'intégrale se ramène à des aires de triangles (Attention aux signes des aires!).

16. Car la ligne de profil est une ligne fermée.

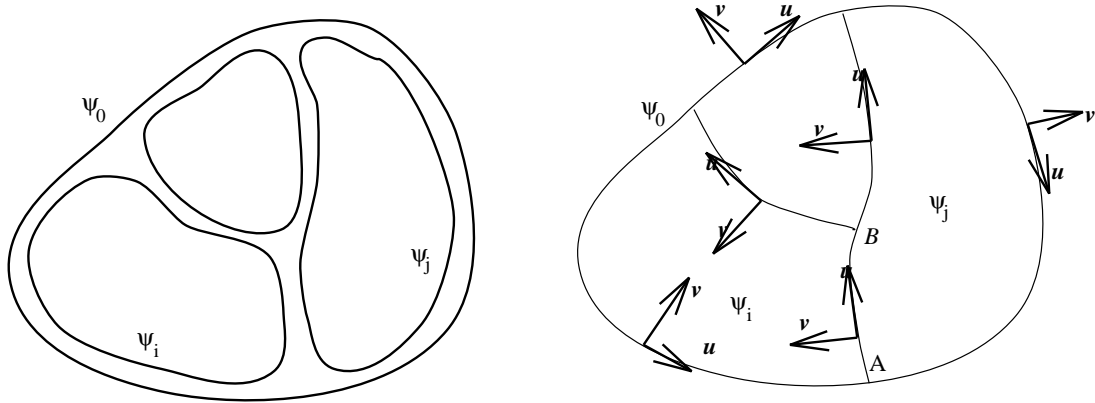


FIG. 7.6 – Section droite d'une poutre en profil mince fermé

Chaque branche est entre deux contours, on note ψ_+ la valeur de ψ sur le contour situé du côté des $v > 0$, et ψ_- la valeur de ψ sur le contour situé du côté des $v < 0$. Par exemple, sur la branche AB , on a $\psi_+ = \psi_i$ et $\psi_- = \psi_j$.

Dans chaque branche, les constantes a et b de la fonction des contraintes sont déterminées par

$$\begin{aligned}\psi_+ = \psi\left(\frac{e}{2}\right) &= -\frac{e^2}{4} + a\frac{e}{2} + b \\ \psi_- = \psi\left(-\frac{e}{2}\right) &= -\frac{e^2}{4} - a\frac{e}{2} + b\end{aligned}$$

Après résolution, on trouve que la fonction ψ dans chaque branche est

$$\psi = -v^2 + \frac{\psi_+ - \psi_-}{e}v + \frac{\psi_+ + \psi_-}{2} + \frac{e^2}{4}$$

et donc

$$\mathbf{grad}\psi = \left(-2v + \frac{\psi_+ - \psi_-}{e}\right) \mathbf{v}$$

Les contraintes tangentielles dans une branche de la section droite sont donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \frac{M_t}{J} \left(-2v + \frac{\psi_+ - \psi_-}{e}\right) \mathbf{u} \simeq \frac{M_t}{J} \left(\frac{\psi_+ - \psi_-}{e}\right) \mathbf{u}}$$

Dans une branche de section droite d'une poutre cloisonnée soumise à un moment de torsion, les contraintes tangentielles dans la section droite sont parallèles à la ligne de profil et constantes dans l'épaisseur de la branche.

La fonction ψ étant définie à une constante additive près, on peut fixer arbitrairement l'un des ψ_i (par exemple $\psi_0 = 0$). Mais les autres ne sont pas connus. On va les déterminer en étudiant le gauchissement de la section droite.

Si on choisit deux points P et Q sur une même branche, on trouve avec un raisonnement analogue aux profils minces ouverts¹⁷ :

$$\xi_1(Q) - \xi_1(P) = \frac{M_t}{GJ} \left[\int_P^Q \frac{\psi_+ - \psi_-}{e} du + \int_P^Q (\mathbf{GM}, \mathbf{X}_1, \mathbf{u}) du \right]$$

17. Mais avec la fonction ψ de la branche.

Si on suit toutes les branches d'un contour intérieur Ω_i (elles forment donc un contour fermé), on doit trouver un gauchissement relatif nul.

$$0 = \frac{M_t}{GJ} \left[\int_{\Omega_i} \frac{\psi_+ - \psi_-}{e} du + \int_{\Omega_i} (\mathbf{GM}, \mathbf{X}_1, \mathbf{u}) du \right]$$

Soit encore :

$$\int_{\Omega_i} \frac{\psi_+ - \psi_-}{e} du - 2 S_i = 0 \text{ sur chaque contour intérieur } \Omega_i$$

où S_i est l'aire entourée par le contour Ω_i .

Ces équations déterminent les ψ_i inconnus¹⁸.

7.8 Autres sections droites

On sait trouver la fonction ψ pour quelques sections droites (ellipse, triangle, cercle entaillé par un autre cercle ...). Pour des sections droites de forme complexe, la solution analytique n'est pas connue en général.

On trouve dans la littérature spécialisée des formulaires qui donnent les valeurs de J et de $\|\boldsymbol{\tau}\|_{max}$ pour un grand nombre de sections droites. Ces valeurs sont d'origine soit analytique, soit numérique, voire expérimentale.

18. Les intégrales $\int_{\Omega_i} \frac{\psi_+ - \psi_-}{e} du$ sont à calculer par morceaux sur chaque branche qui compose le contour Ω_i , car les définitions de ψ_+ et ψ_- changent à chaque branche. Chacune des ces intégrales est souvent très facile à calculer: en effet, ψ_+ et ψ_- sont des constantes sur chaque branche. De plus, l'épaisseur d'une branche est souvent aussi constante.

Chapitre 8

Etude de l'effort tranchant

8.1 Résultats de Saint-Venant

8.1.1 Contraintes dans la section droite

Dans une section droite, les contraintes dues à l'effort tranchant $\mathbf{T} = T_2 \mathbf{X}_2 + T_3 \mathbf{X}_3$ sont :

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= +\partial_3\varphi - \frac{T_3}{I_2} x_2 x_3 - \frac{T_2}{I_3} \frac{x_3^2}{2(1+\nu)} \\ \sigma_{13} &= -\partial_2\varphi - \frac{T_2}{I_3} x_2 x_3 - \frac{T_3}{I_2} \frac{x_2^2}{2(1+\nu)}\end{aligned}$$

où $\varphi(x_2, x_3)$ est solution du problème suivant :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= A \\ d\varphi &= \left(-\frac{T_2}{I_3} x_2 x_3 - \frac{T_3}{I_2} \frac{x_2^2}{2(1+\nu)}\right) dx_2 + \left(\frac{T_3}{I_2} x_2 x_3 + \frac{T_2}{I_3} \frac{x_3^2}{2(1+\nu)}\right) dx_3 \text{ sur le (les) contour(s)} \\ M_t &= 2 \int_S \varphi ds + \int_{\Omega} \varphi (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) \dots \\ &\dots + \frac{T_2}{I_3} \int_S \left(-x_2^2 x_3 + \frac{x_3^3}{2(1+\nu)}\right) ds + \frac{T_3}{I_2} \int_S \left(-x_3^2 x_2 + \frac{x_2^3}{2(1+\nu)}\right) ds\end{aligned}$$

8.1.2 Loi de comportement

Les rotations de la ligne moyenne sont gouvernées par

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{dx_1} &= -A \frac{1+\nu}{E} = -\frac{A}{2G} \\ \frac{d\omega_2}{dx_1} &= 0 \\ \frac{d\omega_3}{dx_1} &= 0\end{aligned}$$

On constate qu'un effort tranchant peut provoquer un mouvement de rotation de torsion.

Les déplacements sont gouvernées par

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dx_1} &= 0 \\ \frac{d^2u_2}{dx_1^2} &= 0 \\ \frac{d^2u_3}{dx_1^2} &= 0\end{aligned}$$

On constate qu'un effort tranchant ne provoque ni allongement de la ligne moyenne, ni variation de sa courbure.

Remarque

Un effort tranchant est pratiquement toujours associé à un moment de flexion. En effet, la seconde équation d'équilibre local des poutres

$$\frac{dM}{dl} + \boldsymbol{\mu} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

montre que si \mathbf{R} a des composantes tangentielles dans la section droite, alors $\frac{dM}{dl}$ a nécessairement aussi des composantes tangentielles. Il y a donc toujours des moments de flexion qui s'ajoutent aux effets de l'effort tranchant. Il y a donc en fait toujours des déplacements transversaux u_2 et u_3 associés à un effort tranchant, mais ils sont dus au moment de flexion associé. On peut donc dire qu'il n'y a pas de déplacements transversaux de la ligne moyenne induits par l'effort tranchant¹.

8.1.3 Gauchissement des sections droites

Dans une section droite d'abscisse x_1 , le champ de déplacement ξ_1 (déplacements perpendiculairement à la section droite) est donné par :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= - \left(\frac{T_2}{EI_3} x_2 + \frac{T_3}{EI_2} x_3 \right) \left(Lx_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) \dots \\ &\dots + \frac{T_2}{EI_3} \left[\nu \frac{x_2^3}{6} - (2 + \nu) \frac{x_2 x_3^2}{2} \right] + \frac{T_3}{EI_2} \left[\nu \frac{x_3^3}{6} - (2 + \nu) \frac{x_2^2 x_3}{2} \right] \dots \\ &\dots + \frac{1 + \nu}{E} Z(x_2, x_3) + \gamma x_2 - \beta x_3 + \alpha_0\end{aligned}$$

En éliminant les termes linéaires en x_2 et x_3 , qui ne provoquent pas de gauchissement, il reste :

$$\xi_{1g} = \frac{T_2}{EI_3} \left[\nu \frac{x_2^3}{6} - (2 + \nu) \frac{x_2 x_3^2}{2} \right] + \frac{T_3}{EI_2} \left[\nu \frac{x_3^3}{6} - (2 + \nu) \frac{x_2^2 x_3}{2} \right] + \frac{1 + \nu}{E} Z(x_2, x_3)$$

où $Z(x_2, x_3)$ est définie par

$$\mathbf{grad}Z = (2 \mathbf{grad}\varphi - A \mathbf{GM}) \wedge \mathbf{X}_1$$

On constate que sous l'effet de l'effort tranchant, les sections droites gauchissent.

1. Ce résultat est en contradiction avec celui donné dans un grand nombre de traités élémentaires de théorie des poutres. Ceci est dû au fait que dans ces exposés élémentaires, on fait une hypothèse cinématique fautive en supposant que deux sections voisines soumises à un effort tranchant glissent l'une par rapport à l'autre parallèlement à leur plan. Le problème de Saint-Venant montre que cette hypothèse est incorrecte. On verra que les seuls déplacements induits par l'effort tranchant sont le gauchissement de la section. Ils n'induisent aucun déplacement de la ligne moyenne. Dans la plupart de ces traités, on se rattrape en disant que les déplacements dus à l'effort tranchant sont négligeables devant ceux dus au moment de flexion qui lui est associé.

8.2 Couplage effort tranchant-torsion

• Si on considère une section droite soumise à un effort tranchant *seul* ($M_t = 0$), (la constante A est déterminée par l'équation :

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \int_S \varphi ds + \int_{\Omega} \varphi (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) \dots \\ &\dots + \frac{T_2}{I_3} \int_S \left(-x_2^2 x_3 + \frac{x_3^3}{2(1+\nu)} \right) ds + \frac{T_3}{I_2} \int_S \left(-x_3^2 x_2 + \frac{x_2^3}{2(1+\nu)} \right) ds \end{aligned}$$

A est donc en général non nul, et la poutre subit une rotation de torsion donnée par

$$\frac{d\omega_1}{dx_1} = -A \frac{1+\nu}{E} = -\frac{A}{2G}$$

• Si par contre on impose que la rotation de torsion est nulle, alors $A = 0$, mais le moment résultant des contraintes tangentielles est un moment de torsion donné par :

$$\begin{aligned} M_t &= 2 \int_S \varphi ds + \int_{\Omega} \varphi (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) \dots \\ &\dots + \frac{T_2}{I_3} \int_S \left(-x_2^2 x_3 + \frac{x_3^3}{2(1+\nu)} \right) ds + \frac{T_3}{I_2} \int_S \left(-x_3^2 x_2 + \frac{x_2^3}{2(1+\nu)} \right) ds \end{aligned}$$

Cette dernière option est plus simple à résoudre car on a $\Delta\varphi = A = 0$. Cependant, le champ des contraintes tangentielles qu'on va trouver est un champ dû à la fois à l'effort tranchant $\mathbf{T} = T_2 \mathbf{X}_2 + T_3 \mathbf{X}_3$ et à un certain moment de torsion M_t (fonction de T_2 et T_3) donné par la formule ci-dessus. Pour obtenir le champ des contraintes tangentielles dû à \mathbf{T} seul, il suffit de lui superposer le champ des contraintes tangentielles dû à $-M_t$.

C'est cette option qu'on retient pour la suite. Pour calculer les contraintes et les déformations dues à un effort tranchant dans une section droite, on résout d'abord un problème avec comme efforts intérieurs \mathbf{T} et le M_t qui lui est associé, puis on lui superpose les contraintes et déformations dues à $-M_t$ (C'est un problème de torsion pure résolu au chapitre précédent.).

8.3 Fonctions des contraintes d'effort tranchant

Le théorème de superposition de l'élasticité linéaire permet d'affirmer que les effets dus à T_2 et à T_3 sont superposables. On pose donc :

$$\varphi = \frac{T_2}{I_3} \psi_2 + \frac{T_3}{I_2} \psi_3$$

ψ_2 est appelée *fonction des contraintes tangentielles dues à T_2* .

ψ_3 est appelée *fonction des contraintes tangentielles dues à T_3* .

Ceci permet de décomposer le problème en la somme de deux problèmes plus simples :

Effets de T_2

– La fonction ψ_2 est solution du problème :

$$\Delta\psi_2 = 0 \tag{8.1}$$

$$d\psi_2 = -x_2 x_3 dx_2 + \frac{x_3^2}{2(1+\nu)} dx_3 \text{ sur le (les) contour(s)} \tag{8.2}$$

ψ_2 ne dépend que de la forme de la section droite.

- Le moment de torsion M_{t2} qui est associé à T_2 est :

$$M_{t2} = \frac{T_2}{I_3} \left[2 \int_S \psi_2 ds + \int_{\Omega} \psi_2 (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) + \int_S \left(-x_2^2 x_3 + \frac{x_3^3}{2(1+\nu)} \right) ds \right] = \frac{T_2}{I_3} B_2 \quad (8.3)$$

B_2 ne dépend que de la forme de la section droite et de ν .

- Les contraintes dues à T_2 et M_{t2} sont :

$$\sigma_{12} = \frac{T_2}{I_3} \left[+\partial_3 \psi_2 - \frac{x_3^2}{2(1+\nu)} \right] \quad (8.4)$$

$$\sigma_{13} = \frac{T_2}{I_3} [-\partial_2 \psi_2 - x_2 x_3] \quad (8.5)$$

- Le torseur intérieur $\{T_2, M_{t2}\}$ n'entraîne ni évolution de la rotation ni allongement de la ligne moyenne.
- Le gauchissement de la section droite dû au torseur intérieur $\{T_2, M_{t2}\}$ est :

$$\xi_{1gT2} = \frac{T_2}{EI_3} \left[\nu \frac{x_2^3}{6} - (2+\nu) \frac{x_2 x_3^2}{2} + (1+\nu) Z_2(x_2, x_3) \right] \quad (8.6)$$

où $Z_2(x_2, x_3)$ est définie par

$$\mathbf{grad} Z_2 = 2 \mathbf{grad} \psi_2 \wedge \mathbf{X}_1 \quad (8.7)$$

Effets de T_3

- La fonction ψ_3 est solution du problème :

$$\Delta \psi_3 = 0 \quad (8.8)$$

$$d\psi_3 = -\frac{x_2^2}{2(1+\nu)} dx_2 + x_2 x_3 dx_3 \text{ sur le (les) contour(s)} \quad (8.9)$$

ψ_3 ne dépend que de la forme de la section droite.

- Le moment de torsion associé à T_3 est :

$$M_{t3} = \frac{T_3}{I_2} \left[2 \int_S \psi_3 ds + \int_{\Omega} \psi_3 (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) + \int_S \left(x_2 x_3^2 - \frac{x_2^3}{2(1+\nu)} \right) ds \right] = \frac{T_3}{I_2} B_3 \quad (8.10)$$

B_3 ne dépend que de la forme de la section droite et de ν .

- Les contraintes dues à T_3 et M_{t3} sont :

$$\sigma_{12} = \frac{T_3}{I_2} [+ \partial_3 \psi_3 - x_2 x_3] \quad (8.11)$$

$$\sigma_{13} = \frac{T_3}{I_2} \left[-\partial_2 \psi_3 - \frac{x_2^2}{2(1+\nu)} \right] \quad (8.12)$$

- Le torseur intérieur $\{T_3, M_{t3}\}$ n'entraîne ni évolution de la rotation ni allongement de la ligne moyenne.

– Le gauchissement de la section droite dû au torseur intérieur $\{T_3, M_{t3}\}$ est :

$$\xi_{1gT3} = \frac{T_3}{EI_2} \left[\nu \frac{x_3^3}{6} - (2 + \nu) \frac{x_2^2 x_3}{2} + (1 + \nu) Z_3(x_2, x_3) \right] \quad (8.13)$$

où $Z_3(x_2, x_3)$ est définie par

$$\mathbf{grad} Z_3 = 2 \mathbf{grad} \psi_3 \wedge \mathbf{X}_1 \quad (8.14)$$

8.4 Centre de cisaillement

On vient de voir que pour qu'une section droite soumise à un effort tranchant se déforme sans torsion, il faut aussi lui soumettre un certain moment de torsion $M_t = \frac{T_2}{I_3} B_2 + \frac{T_3}{I_2} B_3$.

Le torseur intérieur dans la section est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2 \mathbf{X}_2 + T_3 \mathbf{X}_3 \\ \left(\frac{T_2}{I_3} B_2 + \frac{T_3}{I_2} B_3 \right) \mathbf{X}_1 \end{array} \right\}_G$$

On peut trouver dans la section droite un point C tel que les éléments de réduction du torseur intérieur en C soient :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2 \mathbf{X}_2 + T_3 \mathbf{X}_3 \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_C$$

Le lecteur vérifiera facilement que les coordonnées de C dans la section droite sont :

$$\begin{aligned} x_{2C} &= + \frac{B_3}{I_2} \\ x_{3C} &= - \frac{B_2}{I_2} \end{aligned}$$

Les coordonnées de C sont indépendantes de T_2 et T_3 . Elles ne dépendent que de la forme de la section droite et de ν . C est donc une caractéristique de la section droite, on l'appelle *centre de cisaillement*.

On peut interpréter C comme le point de la section sur lequel il faudrait exercer l'effort tranchant pour que la déformation se fasse sans torsion. Le moment $\mathbf{GC} \wedge \mathbf{T}$ de \mathbf{T} appliqué en C par rapport à G est le moment de torsion associé à \mathbf{T} .

8.5 Résolution des problèmes d'effort tranchant

Il résulte de ce qui précède que la démarche pour résoudre un problème avec effort tranchant est la suivante :

- Détermination des fonctions de contraintes ψ_2 et ψ_3 (ces fonctions ne dépendent que de la forme de la section droite) par résolution des problèmes (8.1 8.2) et (8.8 8.9).
- Calcul des valeurs des coefficients B_2 et B_3 avec 8.3 et 8.10.
- Calcul du moment de torsion associé $M_t = \frac{T_2}{I_3} B_2 + \frac{T_3}{I_2} B_3$

- Calcul du champ des contraintes dû à \mathbf{T} et M_t en superposant 8.4 et 8.11 ainsi que 8.5 et 8.12.
- Calcul du champ des contraintes dû à $-M_t$ (problème de torsion)
- Calcul du champ des contraintes dû à \mathbf{T} seul par superposition des deux champs précédents.
- Les seuls déplacements et rotations de la ligne moyenne sont ceux dûs à $-M_t$.

La détermination analytique des fonctions ψ_2 et ψ_3 est rarement possible. On peut comme en torsion faire des analogies électrique ou de membrane, ou encore utiliser une solution numérique.

8.6 Cas des sections droites circulaires

Soit une poutre dont la section droite à l'abscisse x_1 est un disque de rayon R . Les directions principales d'inertie pour cette section sont indifférentes. On peut donc toujours choisir la direction \mathbf{X}_2 dans la direction de l'effort tranchant. On a donc $T_3 = 0$.

On pourra vérifier que la fonction

$$\psi_2 = \frac{3 + 2\nu}{8(1 + \nu)} \left(\frac{x_3^3}{3} - x_3 x_2^2 + R^2 x_3 \right)$$

répond bien au problème en ψ_2 . On pourra vérifier de plus que la quantité B_2 est nulle. Le moment de torsion associé à l'effort tranchant est donc nul, c'est à dire que le centre de cisaillement d'une section droite circulaire est confondu avec le centre de gravité.

Le champ des contraintes tangentielles est alors

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \frac{T_2}{I_3} \left[\frac{3 + 2\nu}{8(1 + \nu)} (x_3^2 - x_2^2 + R^2) - \frac{x_3^2}{2(1 + \nu)} \right] \\ \sigma_{13} &= -\frac{T_2}{I_3} \left[\frac{1 + 2\nu}{4(1 + \nu)} x_2 x_3 \right] \end{aligned}$$

où I_3 est le moment quadratique de la section autour de \mathbf{X}_3 .

Pour une section circulaire on a

$$I_3 = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

L'étude détaillée de ce champ montre que la contrainte tangentielle $\boldsymbol{\tau}$ a un module maximum au centre de gravité de la section qui vaut :

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{max} = \frac{T_2}{I_3} \frac{3 + 2\nu}{8(1 + \nu)} R^2 = \frac{T_2}{\pi R^2} \frac{3 + 2\nu}{8(1 + \nu)}$$

Pour $\nu = 0,3$ on obtient $\|\boldsymbol{\tau}\|_{max} = 1,385 \frac{T_2}{S}$

8.7 Méthodes approchées

La complexité de la solution des problèmes d'effort tranchant justifie l'emploi de méthodes approchées.

8.7.1 Contrainte tangentielle moyenne

Cette approximation (grossière) consiste à supposer que le champ des contraintes tangentielles est uniforme dans la section droite. On a donc

$$\mathbf{T} = \int_S \boldsymbol{\tau} ds = \boldsymbol{\tau} S$$

$\boldsymbol{\tau}$ étant supposé uniforme, on a :

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{max} = \|\boldsymbol{\tau}\| = \frac{\|\mathbf{T}\|}{S}$$

Pour la section circulaire, cette estimation de $\|\boldsymbol{\tau}\|_{max}$ est inférieure de 39% à la valeur exacte.

8.7.2 Approximation de Bredt

Considérons une section droite de forme quelconque soumise à un effort tranchant $\mathbf{T} = T_2 \mathbf{X}_2$.

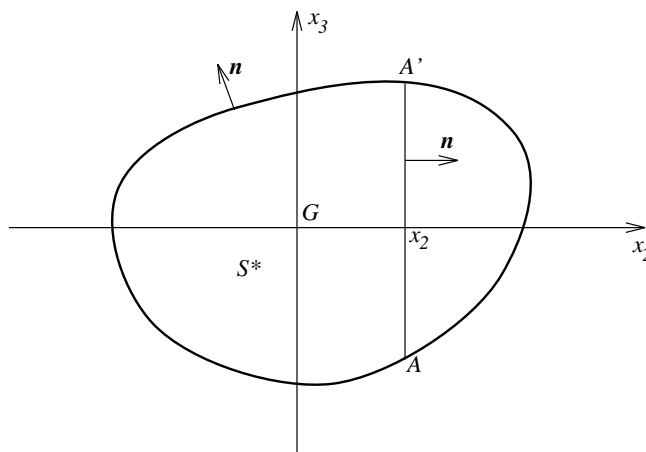


FIG. 8.1 – Le choix de Ω^* dans l'approximation de Bredt pour un effort tranchant T_2

Considérons le segment AA' , d'abscisse x_2 parallèle à \mathbf{X}_3 , qui divise la section droite en deux parties (voir figure 8.1). On appelle S^* la portion de la section droite à gauche de AA' et Ω^* son contour. Ω^* est donc partiellement confondu avec le contour Ω de la section droite. On appelle h^* la longueur du segment AA' (h^* est une fonction de x_2). Enfin, on appelle \mathbf{n} la normale extérieure à Ω^* .

On rappelle ici une propriété du champ des contraintes tangentielles qui a été établie dans le problème de Saint-Venant² :

$$\int_{\Omega'^*} \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{n} dl = -\frac{T_2}{I_3} A(S^*, \mathbf{X}_3) - \frac{T_3}{I_2} A(S^*, \mathbf{X}_2)$$

En l'appliquant au cas présent, on obtient :

$$\int_{AA'} \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{n} dl = -\frac{T_2}{I_3} A(S^*, \mathbf{X}_3)$$

2. On rappelle que $A(S^*, \mathbf{X}_3)$ est le moment statique de S^* par rapport à \mathbf{X}_3 , et que $A(S^*, \mathbf{X}_2)$ est le moment statique de S^* par rapport à \mathbf{X}_2

car sur la partie de Ω^* confondue avec Ω , le produit scalaire $\boldsymbol{\tau} \otimes \bar{\mathbf{n}}$ est nul³.

L'approximation de Bredt consiste à faire sur le champ $\boldsymbol{\tau}$ les deux approximations suivantes :

- Sur le segment AA' , $\boldsymbol{\tau}$ est dans la direction de \mathbf{X}_2
- Sur le segment AA' , la répartition de $\boldsymbol{\tau}$ est uniforme (c'est à dire indépendante de x_3).

On a donc :

$$\int_{AA'} \boldsymbol{\tau} \otimes \bar{\mathbf{n}} \, dl = \int_{AA'} \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{X}_2 \, dl = \tau_2 h^* = -\frac{T_2}{I_3} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_3)$$

et donc

$$\tau_2 = -\frac{T_2}{I_3} \frac{A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_3)}{h^*}$$

Le champ des contraintes tangentielles simplifiés dues à T_2 reste donc uniquement fonction de x_2 car h^* et $A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_3)$ varient avec x_2 .

Pour les contraintes dues à T_3 , on fait une coupure BB' parallèle à \mathbf{X}_2 , d'abscisse x_3 , et suivant le même raisonnement on obtient :

$$\tau_3 = -\frac{T_3}{I_2} \frac{A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_2)}{h^*}$$

Le champ des contraintes tangentielles simplifiés dues à T_3 reste donc fonction de x_3 car h^* et $A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_2)$ varient avec x_3 .

Le lecteur pourra vérifier que si on applique l'approximation de Bredt à une section circulaire, on obtient :

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{max} = 1,33 \frac{T_2}{S}$$

Cette valeur est inférieure de 3,7% à la valeur exacte.

8.8 Approximation des sections droites en profil mince

Les sections droites en profil mince ont déjà été définies dans le chapitre sur la torsion. On utilise ici les mêmes notations.

Pour approximer le champ des contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant dans une section en profil mince, on utilise encore les propriétés du champ $\boldsymbol{\tau}$ établies dans le problème de Saint-Venant, suivant une démarche semblable à l'approximation de Bredt. Mais ici, la coupure AA' est perpendiculaire à la ligne de profil (voir figure 8.2).

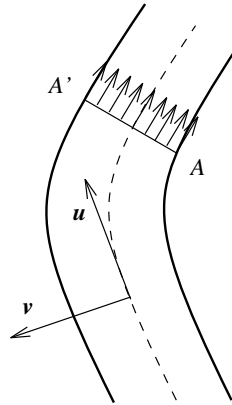
On suppose comme dans l'approximation de Bredt pour les sections quelconques, que la contrainte tangentielle $\boldsymbol{\tau}$ est parallèle à \mathbf{u} et qu'elle est constante dans l'épaisseur du profil⁴.

Le flux de la contrainte tangentielle $\boldsymbol{\tau}$ à travers la coupure AA' est donc

$$\Phi = (\boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{u}) \, e$$

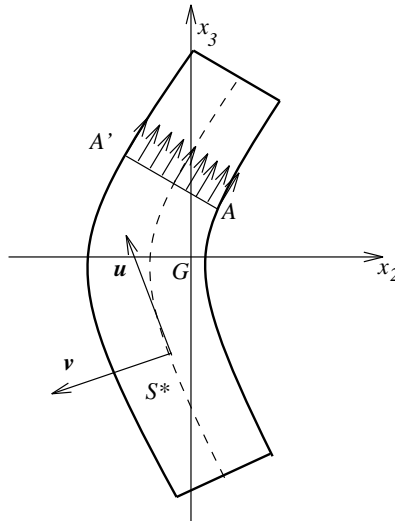
3. Revoir les conditions aux limites sur le contour dans le problème de Saint-Venant.

4. Ces hypothèses sont mieux justifiées pour les profils minces que pour les sections de forme quelconque. En effet, la condition aux limites sur le contour dans le problème de Saint-Venant impose que $\boldsymbol{\tau}$ est tangente au contour. Avec ces hypothèses, $\boldsymbol{\tau}$ est bien tangente au contour, alors qu'il ne l'était pas pour une section quelconque. De plus, le profil étant mince, il est raisonnable de penser que $\boldsymbol{\tau}$ est sensiblement constant dans l'épaisseur.


 FIG. 8.2 – Choix de Ω^* pour les contraintes tangentielles dues à \mathbf{T}

8.8.1 Profils minces ouverts

Il suffit d'appliquer la propriété du flux de $\boldsymbol{\tau}$ sur la portion de section S^* de la figure 8.3 :


 FIG. 8.3 – Choix de S^* pour les profils minces ouverts

On obtient :

$$\int_{\Omega'^*} \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{n} \, dl = \epsilon \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{u} = -\frac{T_2}{I_3} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_3) - \frac{T_3}{I_2} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_2)$$

et donc :

$$\boldsymbol{\tau} = \left[-\frac{T_2}{\epsilon I_3} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_3) - \frac{T_3}{\epsilon I_2} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_2) \right] \mathbf{u}$$

$\boldsymbol{\tau}$ évolue en fonction de l'abscisse curviligne u car les moments statiques $A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_3)$ et $A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_2)$ varient avec la position de la coupure AA' .

Il est à noter que pour les profils minces, le calcul des moments statiques peut se ramener à une

intégrale simple :

$$A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_3) = \int_S x_2 ds \simeq \int_P^Q x_2(u) e du$$

où P et Q sont les points de la ligne de profil qui délimitent \mathcal{S}^* .

De même,

$$A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_2) = \int_S x_3 ds \simeq \int_P^Q x_3(u) e du$$

Une fois les contraintes tangentielles calculées, on peut alors calculer leur moment résultant M_t en G et en déduire la position du centre de cisaillement. On peut alors déduire les contraintes et les déplacements dus à $-M_t$.

8.8.2 Profils minces cloisonnés

De la même manière qu'en torsion, la ligne de profil est un graphe composé de branches reliant des nœuds (figure 8.4).

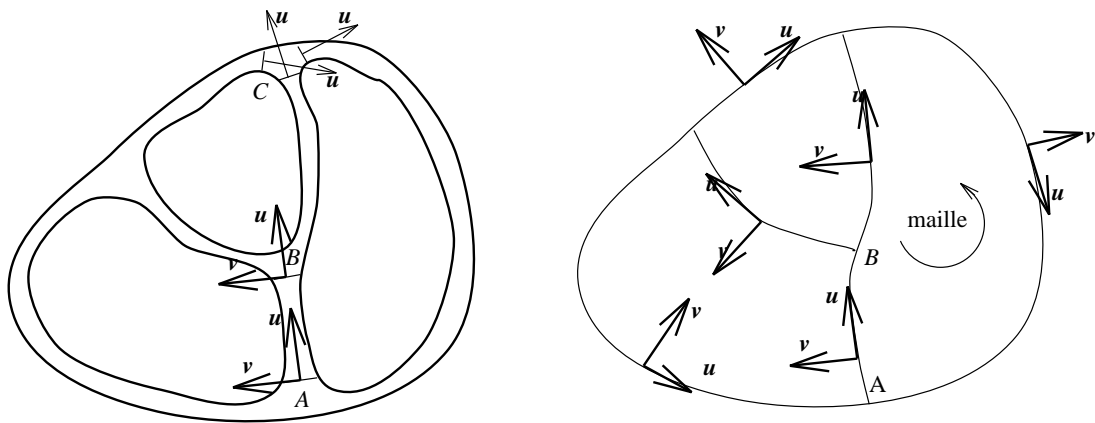


FIG. 8.4 – Ligne de profil d'un profil mince fermé

Puisque les contraintes tangentielles dans la section droite sont constantes dans l'épaisseur de chaque branche, on peut raisonner sur les flux de τ à travers les coupures.

Loi des branches

On considère une branche AB et on choisit pour \mathcal{S}^* la portion de section droite qui recouvre la branche entre ses deux nœuds. Pour la branche AB , la loi de flux de τ sur Ω^* s'écrit :

$$\begin{aligned} -\frac{e T_2}{I_3} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_3) - \frac{e T_3}{I_2} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_2) &= \int_{\Omega^*} \tau \bar{\otimes} \mathbf{n} dl \\ &= -\int_{\Omega_A} \tau_A \bar{\otimes} \mathbf{u}_A dl + \int_{\Omega_B} \tau_B \bar{\otimes} \mathbf{u}_B dl \\ &= e_B \tau_B \bar{\otimes} \mathbf{u}_B - e_A \tau_A \bar{\otimes} \mathbf{u}_A \\ &= \Phi_B - \Phi_A \end{aligned}$$

En écrivant cette relation pour chaque branche, on obtient les relations entre les « flux d'entrée » et les « flux de sortie » de chaque branche.

Loi des nœuds

On considère maintenant un nœud C et on choisit pour S^* la portion de section droite qui raccorde les branches qui aboutissent au nœud. La section étant en profil mince, l'aire de S^* est de l'ordre de e^2 , donc négligeable, et ses moments statiques sont nuls. La loi de flux de $\boldsymbol{\tau}$ sur Ω^* s'écrit :

$$\int_{\Omega^*} \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{n} \, dl = \sum_{i \in I} (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{n}) \Phi_i = 0$$

où I est l'ensemble des numéros de branches aboutissant au nœud.

Le produit scalaire $\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{n}$ vaut respectivement $+1$ ou -1 selon que \mathbf{u} est sortant ou entrant.

On peut écrire ces relations pour tous les nœuds⁵.

Loi des mailles

Pour clore la détermination des flux, il faut utiliser la seconde propriété du champ des contraintes tangentielles : la propriété de circulation de $\boldsymbol{\tau}$ le long d'une courbe fermée Ω^* , qu'on rappelle ici :

$$\int_{\Omega^*} \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{dl} = -A\mathcal{S}^* + \frac{\nu}{1+\nu} \left[\frac{T_2}{I_3} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_3) - \frac{T_3}{I_2} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_2) \right] - \sum_i \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{dl}$$

où le dernier terme est la somme des circulations de $\boldsymbol{\tau}$ le long des contours intérieurs entourés par Ω^* .

On choisit pour S^* la portion de section droite délimitée par une ligne fermée tracée sur la ligne de profil entourant un « trou ». S^* a donc un contour extérieur Ω_e^* (sur la ligne de profil) et un contour intérieur Ω_i^* (le contour du trou). En appliquant la propriété de circulation sur S^* , on obtient :

$$2 \int_{\Omega_e^*} \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{dl} = \left[\frac{T_2}{I_3} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_3) - \frac{T_3}{I_2} A(\mathcal{S}^*, \mathbf{X}_2) \right]$$

On écrit cette relation pour chaque maille entourant un trou.

Résolution

L'ensemble des équations précédentes (lois des branches, lois des nœuds et loi de mailles) forme un système d'équations linéaire où les inconnues sont les contraintes tangentielles (ou les flux) à l'entrée et à la sortie de chaque branche. On en déduit les contraintes tangentielles à l'entrée et à la sortie de chaque branche.

On peut alors calculer la contrainte tangentielle en tout point d'une branche en appliquant la loi des branches sur un S^* compris entre l'entrée de la branche et une coupure quelconque dans la branche.

5. L'ensemble des équations de flux (branches et nœuds) comporte une équation de trop, l'une d'entre elles étant une combinaison linéaire des autres. Ceci vient du fait que le moment statique de toute la section est nul.

Chapitre 9

Conclusion

- La théorie des poutres est une *théorie élastique des milieux continus curvilignes*. Les efforts extérieurs sont donc considérés comme appliqués sur la ligne moyenne de la poutre.
- Les efforts intérieurs d'un milieu curviligne sont représentés par un *torseur*: le torseur des efforts intérieurs.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} = N \mathbf{x}_1 + T_2 \mathbf{x}_2 + T_3 \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{M} = M_t \mathbf{x}_1 + M_{f2} \mathbf{x}_2 + M_{f3} \mathbf{x}_3 \end{array} \right\}_G$$

- Les déformations sont représentées par la rotation de torsion de la ligne moyenne (due au moment de torsion), les variations de courbure de la ligne moyenne (rotations dues au moment de flexion) et par l'allongement de la ligne moyenne.

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dl} = \frac{d\omega_1}{dl} \mathbf{t} + \frac{d\omega_2}{dl} \mathbf{x}_2 + \frac{d\omega_3}{dl} \mathbf{x}_3$$

$$\frac{d\omega_1}{dl} : \text{Déformation de torsion}$$

$$\frac{d\omega_2}{dl} : \text{Variation de courbure dans le plan } (x_1, x_3) = \text{déformation de flexion autour de } \mathbf{x}_2$$

$$\frac{d\omega_3}{dl} : \text{Variation de courbure dans le plan } (x_1, x_2) = \text{déformation de flexion autour de } \mathbf{x}_3$$

$$\frac{du_1}{dl} : \text{Allongement de la ligne moyenne}$$

Pour les poutres droites, on peut ajouter les relations géométriques:

$$\frac{d\omega_2}{dl} = -\frac{d^2 u_3}{dx_1^2} \text{ et } \frac{d\omega_3}{dl} = +\frac{d^2 u_2}{dx_1^2}$$

- On en déduit les déplacements par intégration des déformations

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_B &= \boldsymbol{\omega}_A + \int_A^B \left(\frac{d\omega_1}{dl} \mathbf{t} + \frac{d\omega_2}{dl} \mathbf{x}_2 + \frac{d\omega_3}{dl} \mathbf{x}_3 \right) dl \\ \mathbf{u}_B &= \mathbf{u}_A + \boldsymbol{\omega}_A \wedge \mathbf{AB} + \int_A^B \frac{du_1}{dl} \mathbf{t} dl + \int_A^B \left(\frac{d\omega_1}{dl} \mathbf{t} + \frac{d\omega_2}{dl} \mathbf{x}_2 + \frac{d\omega_3}{dl} \mathbf{x}_3 \right) \wedge \mathbf{GB} dl \end{aligned}$$

- La loi de comportement *élastique* des poutres est la relation entre le torseur des efforts intérieurs

et les déformations :

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dl} &= \frac{N}{E S} \\ \frac{d\omega_1}{dl} &= \frac{M_t}{G J} \\ \frac{d\omega_2}{dl} &= \frac{M_{f2}}{E I_2} \\ \frac{d\omega_3}{dl} &= \frac{M_{f3}}{E I_3}\end{aligned}$$

où E et $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ sont des caractéristiques élastiques du matériau, et S , J , I_2 et I_3 sont des caractéristiques de la section droite.

Cette loi de comportement a été déduite de la résolution d'un problème d'élasticité : le problème de Saint-Venant.

- Pour pouvoir vérifier la résistance des poutres, la connaissance du torseur des efforts intérieurs est insuffisante. Il est nécessaire de revenir aux contraintes pour pouvoir appliquer un critère de limite élastique¹.

Les quatre derniers chapitres ont eu principalement pour objet de préciser la distribution des contraintes pour chacune des composantes du torseur intérieur. Les contraintes dans une poutre résultent donc de la superposition des tenseurs dus à chacune de ces composantes (théorème de superposition). Il est à la charge de l'ingénieur de choisir un critère de limite élastique et de garantir que ce critère est satisfait *en tout point de la poutre*².

- Le critère de limite élastique doit toujours être respecté, mais l'ingénieur a souvent d'autres conditions imposées par le cahier des charges (par exemple des valeurs maximum de rotation ou déplacement de la ligne moyenne). La théorie des poutres permet de les évaluer.

- Pour terminer, il faut rappeler que la théorie des poutres a été établie sous des hypothèses géométriques et mécaniques qu'on rappelle ici :

- Les dimensions transversales des sections droites sont petites devant les rayons de courbure de la ligne moyenne,
- La solution de Saint-Venant n'est correcte que loin des points d'application des efforts.

Il ne faut donc pas tenter de faire dire à la théorie des poutres ce qu'elle ne peut pas dire. Si on veut des résultats sur une poutre courbe, courte ou au voisinage de l'application des efforts, il faut faire une étude en élasticité tridimensionnelle (éventuellement locale).

Cet exposé de statique des poutres ne prétend pas être complet. Il a seulement pour but de situer la théorie des poutres dans l'ensemble de la mécanique, et de donner les moyens de calculer des structures simples de poutres. La littérature spécialisée en théorie des poutres³ est très riche. On y trouvera un grand nombre de traités exposant des méthodes particulières et des formulaires⁴. Cette

1. La distribution des contraintes dans une poutre dépend de la forme de la section droite et des efforts intérieurs en présence. On ne peut donc pas construire de critère de limite élastique portant sur les composantes du torseur intérieur, ou alors seulement pour une forme section particulière.

2. La distribution des contraintes dans une poutre étant souvent complexe, la recherche des points les plus dangereux vis à vis du critère choisi est difficile. On se contente souvent d'évaluer le critère en un certain nombre de points choisis, en espérant que le véritable maximum n'est pas loin de celui trouvé dans ces points. On emploie donc un coefficient de sécurité pour masquer cette incertitude.

3. souvent abusivement nommée « Résistance Des Matériaux » ou RDM

4. qui ne précisent pas toujours clairement dans quel cas on peut les appliquer...

profusion vient de ce que jusqu'à ces dernières décennies, cette théorie était la seule modélisation numériquement accessible pour calculer les structures complexes.

Il reste que deux points importants n'ont pas été abordés:

- Les méthodes énergétiques. Elles sont l'objet d'un autre cours. Elles sont fondamentales pour l'utilisation de la méthode des éléments finis.
- La stabilité. En effet, les équations d'équilibre ne fournissent aucun renseignement sur la stabilité des solutions trouvées. Son étude sera abordée plus tard dans un cadre plus général.

Table des matières

1	Introduction.	3
2	Géométrie des poutres.	5
2.1	Définition d'une poutre	5
2.2	Caractéristiques géométriques des sections droites.	6
2.2.1	Centre de gravité.	6
2.2.2	Moment statique par rapport à une droite.	7
2.2.3	Moment quadratique d'une section par rapport à une droite.	8
2.2.4	Le repère local principal en théorie des poutres.	8
3	Actions mécaniques dans les poutres.	11
3.1	Actions mécaniques extérieures.	11
3.1.1	Les charges.	12
3.1.2	Les actions de liaison.	12
3.1.3	Equilibre des actions mécaniques extérieures.	13
3.2	Efforts intérieurs.	14
3.3	Equations d'équilibre local des poutres.	15
3.4	Torseur intérieur et contraintes.	16
4	Problème de Saint-Venant	19
4.1	Définition du problème	19
4.2	Hypothèse de Saint-Venant	20
4.3	Principe de Saint-Venant	21
4.4	Les équations du problème de Saint-Venant	21
4.5	Résolution des contraintes	22
4.6	Conditions aux limites	23
4.7	Résumé des résultats sur les contraintes	26
4.8	Propriétés du champ des contraintes tangentielles	27
4.8.1	Circulation de $\boldsymbol{\tau}$ le long de Ω^*	28

4.8.2	Flux de τ à travers Ω^*	28
4.9	Déformations et déplacements	28
4.10	Application de la solution de Saint-Venant aux poutres	31
4.11	Application aux poutres de faible courbure	32
4.12	Conclusion	33
5	Etude de l'effort normal	35
5.1	Résultats de Saint-Venant	35
5.1.1	Champ du tenseur des contraintes	35
5.1.2	Déformation et déplacements de la ligne moyenne	37
5.1.3	Déformations dans la section droite	37
5.2	Applications	38
5.2.1	Structures réticulées (ou treillis)	38
5.2.2	Fils (ou câbles)	39
6	Etude du moment de flexion	41
6.1	Résultats de Saint-Venant	41
6.1.1	Champ du tenseur des contraintes	41
6.1.2	Déformation et déplacements de la ligne moyenne	42
6.1.3	Déformations dans la section droite	43
6.2	Applications	44
7	Etude du moment de torsion	45
7.1	Résultats de Saint-Venant	45
7.1.1	Champ du tenseur des contraintes	45
7.1.2	Déformation et déplacements de la ligne moyenne	46
7.2	Fonction des contraintes de torsion	47
7.3	Résolution de la torsion dans les poutres	48
7.3.1	Techniques de résolution de ψ	48
7.3.2	Calcul de J	49
7.4	Gauchissement des sections droites	50
7.5	Application aux sections droites circulaires	51
7.6	Application aux sections droites annulaires	52
7.7	Approximation pour les sections droites en profil mince	53
7.7.1	Cas des sections droites simplement connexes	54
7.7.2	Cas des sections droites non simplement connexes	56
7.8	Autres sections droites	58

8	Etude de l'effort tranchant	59
8.1	Résultats de Saint-Venant	59
8.1.1	Contraintes dans la section droite	59
8.1.2	Loi de comportement	59
8.1.3	Gauchissement des sections droites	60
8.2	Couplage effort tranchant-torsion	61
8.3	Fonctions des contraintes d'effort tranchant	61
8.4	Centre de cisaillement	63
8.5	Résolution des problèmes d'effort tranchant	63
8.6	Cas des sections droites circulaires	64
8.7	Méthodes approchées	64
8.7.1	Contrainte tangentielle moyenne	65
8.7.2	Approximation de Bredt	65
8.8	Approximation des sections droites en profil mince	66
8.8.1	Profils minces ouverts	67
8.8.2	Profils minces cloisonnés	68
9	Conclusion	71